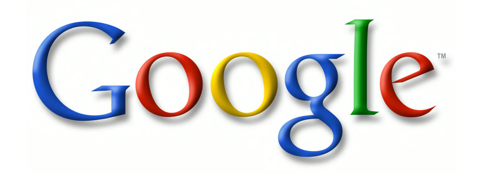
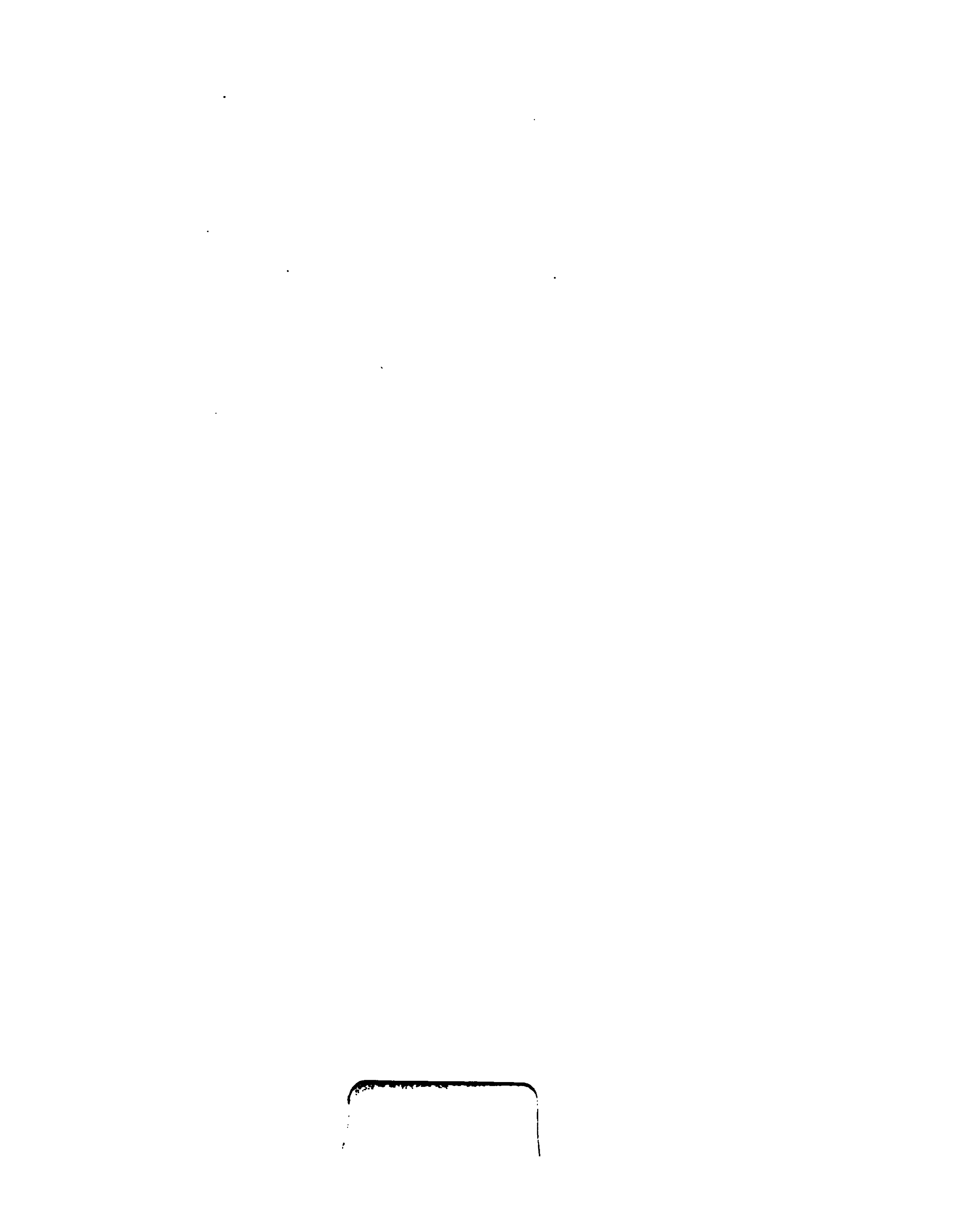



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06641294 5



(Goldschmidt)



# Die

# Wahrscheinlichkeitsrechnung.

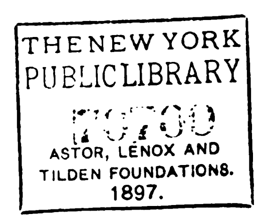
## Versuch einer Kritik

von

**Dr. Ludwig Goldschmidt,**

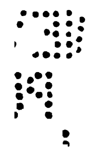
mathematischem Revisor der Lebensversicherungsbank für Deutschland
in Gotha.

Hamburg und Leipzig,
Verlag von Leopold Voss.
1897.






Pierer'sche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.



# Vorwort.

Über den Wert wissenschaftlicher Methoden kann man streiten; es ist überall gestattet, die eine vor der andern zu bevorzugen. Eine jede mufs sich aber über ihre erkenntnistheoretische Berechtigung zweifelsfrei auszuweisen vermögen. Diese Überzeugung hat mich bei den folgenden Untersuchungen geführt und mich veranlafst, von allgemeinsten Erörterungen auszugehen, die im wesentlichen auf Kantischer Grundlage fufsen.

Jene Schwierigkeit, die viele Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit sich bringen, habe ich an mir selbst erfahren. Als ich mich vor wenigen Jahren vom Lehrerberufe dem Versicherungswesen zugewendet hatte, wollte es mir namentlich nicht gelingen, den Gebrauch der Bayesschen Regel mit meinem Denken zu vereinigen.

Die Kritik der beiden Gelehrten Fries (Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1842) und Cournot (Exposition de la théorie des chances et des probabilités, 1843) ist an den Lehrbüchern der Disziplin selbst fast spurlos vorübergegangen und hat erst in neuester Zeit den Anlafs gegeben, ihre Grundgedanken wiederum zu prüfen.

Die Abhandlungen der Logik widmen der Lehre eine eingehendere Darstellung, besonders seitdem Lotze ihr ein Kapitel seiner scharfsinnigen und kritischen Betrachtungen geschenkt hat. Seine geistreiche Verknüpfung der Theorie mit dem disjunktiven Urteil giebt eine Erkenntnis der formal logischen Vorgänge, die mit dem mathematischen Wahrscheinlichkeitsurteil verbunden sind. Indem sie uns aber von dem Urnenschema frei zu machen sucht, legt sie nahe, dessen erkenntnistheoretischen Gehalt zu übersehen.

In der That ist mit der auf dem disjunktiven Urteil gründenden Theorie STUMPFS, die er in den Berichten der bairischen Akademie (1892) im Gegensatze zu den 1886 erschienenen Untersuchungen von v. KRIES giebt, das ursprüngliche, einen wenn auch noch so blassen Sachverhalt voraussetzende Schema auf ein rein logisches gebracht.

Hauptsächlich im Widerspruch mit den von STUMPF vertretenen Ansichten, die den Hauptton auf das Moment des Nichtwissens legen, reifte in mir der Entschlufs, den von v. KRIES erhobenen Anspruch auf objektive Begründung der Ansätze, wie sie unser Wissen zu geben hat, von neuem geltend zu machen und, wie ich hoffen darf, auch zu rechtfertigen.

So nahe daher die grundlegenden Anschauungen meines Buches den von v. KRIESschen stehen, so bin ich doch seiner Aufstellung eines Prinzips der Spielräume entgegengetreten, hierin mit STUMPF übereinstimmend, der ebenfalls die allgemeinen Erkenntnisprinzipien für ausreichend hält. Für mich ist das Gleichwahrscheinliche immer das in gleicher Weise B e g r ü n d e t e, und die Beurteilung des gleich U n b e g r ü n d e t e n, das lediglich zum Erraten auffordert, scheidet wiederum unsere Auffassungen, die sich beide als logische ansprechen lassen dürfen. Das Geschehen selbst, auf das sich alle mathematischen Aussagen der Lehre beziehen, ist durch keine Analyse erfafsbar; eben deshalb aber haben wir alle Ursache, uns für mathematische Wahrscheinlichkeitsurteile auf die allgemeinen Prinzipien der Erfahrung zu stützen.

Ich habe an die alte Theorie angeknüpft und mich auf den Schematismus beschränkt; man sollte ihn immer scharf von den Anwendungen trennen, die sich in jeder Disziplin erst als berechtigt auszuweisen haben. Nur wo es unumgänglich notwendig war, habe ich den Anwendungen einige allgemeinste Bemerkungen gewidmet. Auf die in neuerer Zeit mehr als je in den Vordergrund tretende eigene Kritik der Einzeldisziplinen näher einzugehen, hätte das gesteckte Ziel überschritten.

Es ist mir lieb, dafs die Vorrede noch die Gelegenheit giebt, auf ein Versehen hinzuweisen, dessen ich mich auf S. 208 und auch an anderem Orte[1]) gegen v. KRIES schuldig gemacht habe.

In der That vertritt v. KRIES den Standpunkt, dafs der da-

---

[1]) Wahrscheinlichkeit und Versicherung. Bulletin du Comité Permanent des Congrès internationaux d'Actuaires. 1897. Heft 1. S. 61.

selbst besprochene Ansatz ohne feste Voraussetzungen bedeutungslos sei, wie denn überhaupt seine Auffassung in den ersten grundlegenden Fragen von der unsern kaum abweichen dürfte.

Nur formell bedingt es einen Unterschied, wenn v. KRIES von der Willkür der Ansätze spricht, während in der historisch gegebenen Lehre jegliche Unklarheit schwindet, wenn man die nötigen Voraussetzungen ausdrücklich ausspricht, wie es neuerdings in dem Lehrbuche von J. BERTRAND: Calcul des probabilités (Paris 1889) geschehen ist.

Die Schwierigkeiten beginnen erst mit der Anwendung der BAYESschen Regel, und man hat allen Anlaſs, sich von deren berückenden Überlegungen frei zu machen, sofern sie mit Annahmen rechnet, die sich nur als logisch oder auch objektiv möglich ausweisen können. Auch sie haben nur Wert, wofern sie gleichbegründet sind.

Auf einem so oft behandelten Gebiete wesentlich Neues zu bringen oder auch jeden schon früher ausgesprochenen Gedanken durch einen Hinweis zu belegen, wird man weder verlangen, noch soll es für unsere Darstellung in Anspruch genommen werden.

Indessen wird man ihr das Urteil nicht versagen, daſs sie mit eigenem Denken den schwierigen Gegenstand zu beleuchten und ihn überdies von unnötigen Überlegungen zu befreien sucht.

Die Bedürfnisfrage wird man, trotz der so tiefgehenden Untersuchungen von v. KRIES, nicht verneinen wollen. Man muſs von einem jeden Kapitel der Methodenlehre beanspruchen, daſs es nach seinen Vorschriften unzweideutig erscheine, wenn auch in der Begründung eine durch die menschliche Natur gegebene Wahl verbleiben sollte. Und so glaube ich, daſs die Veröffentlichung durch die von STUMPF und von einigen Lehrbüchern der Logik vertretene Theorie des disjunktiven Urteils hinreichend gerechtfertigt erscheint.

Das Buch richtet sich an alle, die an der Wahrscheinlichkeitslehre ein Interesse nehmen, und ist aus dem Wunsche entstanden, denen einen Dienst zu leisten, die sich mit ihr vertraut machen wollen.

Die wenigen mathematischen Ableitungen werden durch erklärenden Text erläutert, so daſs jeder Gebildete mühelos zu folgen vermag.

Im übrigen sind die einfachen Rechnungsregeln so populär, daſs es wünschenswert erscheint, sie nicht mit falschen Vorstellungen weiter kursieren zu lassen. Namentlich die Schule hätte die Ver-

pflichtung, sich nicht bloſs auf kombinatorische Übungen zu beschränken, sondern auch auf die Voraussetzungen hinzuweisen, die allein jene Quotienten zu Rechnungselementen machen. Schon hier wäre Gelegenheit geboten, die Begriffe der logischen und objektiven Möglichkeit zu erörtern und auf jene reinliche Scheidung hinzuzuweisen, durch die KANT mühselige wissenschaftliche Arbeit und Spekulation trennte, indem er Erkennen und Denken durch Wort und Erklärung auseinanderhielt. In letzter Linie ist es die Verwechslung dieser beiden Funktionen, die auf unserem Gebiete Irrtümer hervorgerufen hat.

Ich erfülle gern die Pflicht, hülfreichen Freunden an dieser Stelle meinen Dank abzustatten. Die Herren Gymnasialoberlehrer Dr. Rohrbach und Dr. Ad. Schmidt haben mich bei der Korrektur unterstützt und auch sonst freundlich beraten.

Herrn Professor Dr. Harzer, bisher in Gotha, nunmehr in Kiel, bin ich für das freundliche Interesse dankbar, das er an dieser Veröffentlichung genommen hat, wie ich mich auch der Verlagsbuchhandlung zu groſsem Danke verbunden weiſs.

Gotha, im April 1897.

**Ludwig Goldschmidt.**

# Inhalt.

# Berichtigungen.

Seite 7 Zeile 13 v. u. lies: wenn ich mir nur nicht selbst widerspreche.
„ 32 „ 17 v. o. „ geben für gehen.
„ 46 „ 5 v. u. „ identische für identischen.
„ 48 „ 1 v. u. „ nach „Induktion“: entlehnt.
„ 86 „ 16 v. u. „ $w \cdot$ für $w s$.
„ 107 „ 1 v. o. „ nach „die“: sich.

# Einleitung.

Nach den gleichen Gesetzen vollzieht sich das Denken des gewöhnlichen Lebens und das der Wissenschaft. Der Inhalt kann ein anderer sein bei den Äufserungen derselben Funktion, aber auch das ist nicht immer der Fall. Vielmehr überwiegt in der Wechselwirkung die Gemeinsamkeit der Gegenstände, welche denkend bearbeitet werden. Die Disziplinen lassen sich zählen, deren Inhalt frei ist von den Gedanken des Alltags, und wenn sie es wirklich zu sein scheinen, wird es meistens nicht schwer sein, in den Bausteinen dieselben Elemente nachzuweisen, deren sich der bedürftige Mensch im Kampfe mit der Natur bedienen mufste, um sich zu ihrem Herrn zu machen. Eine beständige Anregung geht vom praktischen Leben aus und fördert wissenschaftliche Arbeit, sei es, dafs es Aufgaben zur Lösung stelle oder sich selbst als Objekt der Untersuchung erbiete. An den Strom von Gedanken, der zurückfliefst, zu erinnern, ist in einer Zeit unnötig, in welcher der erste Physiker seines Jahrhunderts ein Institut leitete, das auf wissenschaftlicher Basis praktische Zwecke verfolgt.

Das Denken ist eines; liefse es sich in Arten zerlegen, so würde die Anarchie widerstreitender Gedanken eine jede Verständigung unter den Menschen unmöglich machen. Eine babylonische Sprachverwirrung kann diese Verständigung erschweren, aber sie selbst hat zur Voraussetzung, dafs die Elemente des Denkens in den betroffenen Individuen gewahrt bleiben. Ohne einheitliches Denken wäre eine jede Sprache ein Nonsens; der Mensch würde sie unterdrücken müssen, um nicht mifsverstanden zu werden.

Wenn aber das Denken der Wissenschaft und das des Lebens dasselbe ist, wie kommen wir dazu, beide durch unsere Worte zu scheiden?

Die Wissenschaft bestimmt ihren Gegenstand selbständig, läfst sich hinwiederum nur von diesem leiten und kann daher von allem absehen, was sich nicht notwendig auf ihre Objekte bezieht. In dieser Selbstbestimmung liegt ihre Freiheit, aber im engsten Zusammenhange mit der freien Wahl des Gegenstandes steht eine feste Ordnung ihrer Gedanken, die nicht willkürlich, sondern in einem einheitlichen Gefüge aneinander gereiht werden müssen. Nur graduell scheidet sie von dem sonstigen Denken die strenge Prüfung, welche sie den logischen Elementen vor oder mit der Verwendung widmet.

Der gesunde Menschenverstand in seiner gewöhnlichen Bethätigung hingegen ist ein Diener der Bedürfnisse und Gegenstände, wie sie im bunten Wechsel ohne Rücksicht auf irgend eine systematische Beschränkung das Leben bietet. Er ist zugleich abhängig von dem Entwicklungsstadium, in welchem sich das wissenschaftliche Denken der Zeit befindet, und von dem Anteil, welchen er selbst sich an diesem erworben hat. Der Sprachgebrauch ist zu milde mit der Prädizierung des gesunden Menschenverstands, und die Philosophen fühlen sich bewogen, das Prädikat mit einem Beigeschmack von Herablassung zu verwenden. Wie sie meinen, verläfst sich der gesunde Menschenverstand auf den Sinnenschein und ist schwer zu bewegen, an dem zu zweifeln, was für ihn auf der Hand liegt, während doch mit dem Zweifel der philosophische, das ist der kritische Verstand anhebt. Der von einer unphilosophischen Majorität geleitete Sprachgebrauch andrerseits ist parteiisch und nicht abgeneigt, eine gewisse Beschränktheit, weil sie immerhin Selbständigkeit zeigt, anzuerkennen. Das kann natürlich nicht davon abhalten, vom gesunden Menschenverstand im besten Sinne zu sprechen und auch von ihm eine Kritik seiner Gedanken zu verlangen. Alles in allem ist er ein relativer Begriff, und man sollte ihn dem Einzelnen um so mehr zusprechen, in je intensiverer Weise er von dem, was wissenschaftliches Denken ihm erworben hat, tagtäglich Gebrauch zu machen versteht. Wir glauben auch dem Volksmund nicht, die Gelehrten sind nicht immer die Verkehrten, und trifft dies Wort im einzelnen Falle zu, so bietet sich entweder kein Angriffspunkt für die Anwendung erlangter Kenntnis oder die Beschränktheit des Subjekts verhindert, wie sie ein planloses Anhäufen von Wissen gestattet, zugleich eine organische Verschmelzung in der Persönlichkeit. Für diesen Fall läfst auch die Gelehrsamkeit den beschränkten Kopf zu, der in seinem Denken

und Handeln einen krassen Unterschied zeigt, weil er, wie Kant treffend bemerkt, nicht zu subsumieren, d. h. in dem vorliegenden besonderen Falle nicht die Übereinstimmung mit ihm bekannten allgemeinen Verhältnissen zu erkennen fähig ist.

Seitdem Menschen überhaupt existieren, und das will ebensowohl sagen: so lange gedacht wird, befolgt das Denken unwillkürlich Gesetze, welche kodifiziert in der Logik vorliegen. Die Wissenschaft hatte nur aufzuschreiben, was in der Thätigkeit des gesunden Menschenverstands vorlag, und die Logik war fertig. Aber doch liegt die Aufgabe anders als etwa die des Gesetzgebers, der das Gewohnheitsrecht der Vergangenheit der Zukunft vorschreibt und dabei die Bemerkung machen wird, daſs seine Bestimmungen von ähnlichen anderer Völker abweichen. Unabhängig von Ort und Zeit heischen dieselben Gesetze Gehorsam, und ihrem Zwange würde man sich nicht entziehen können, auch wenn man es wollte. In der That war das Gebäude der Logik schon früh unter Dach und Fach. Durch Jahrhunderte hat die formale Logik des Aristoteles eine groſse Wertschätzung genossen, die freilich keinen anderen Ausbau zuzulassen schien, als die Vervollkommnung jener Technik des Denkens, die in der Erschöpfung aller möglichen Syllogismen ihre höchste Aufgabe sah.

Erst in neuerer Zeit hat man erkannt, daſs mit der formalen Logik allein der menschliche Verstand in seinem ganzen Umfange nicht auf Regeln gebracht war. Man hätte das schon aus den in der Wissenschaft seit alter Zeit mitgeschleppten Trugschlüssen und Sophismen ersehen können. Gerade sie beweisen, daſs es logische Fehler — Verstöſse gegen die formale Logik des Aristoteles — bei normalem Verstande nicht giebt, denn diese beschreibt ja nur die Verfahrungsweisen des Verstandes. Nicht im logischen Schlusse irren wir, sondern in der Anwendung der absolut sicheren Form auf den Stoff, der unserem Urteil unterliegt. Die formale Logik giebt die ersten Bedingungen, die erfüllt sein müssen, wenn wir richtig urteilen wollen, aber die Formen des Denkens sind überall dieselben, da es ja nur ein Denken giebt. Soll die Logik zu einem Kriterium der Erkenntnis werden, so kann sie nicht umhin, den Gedanken auch auf seinen Inhalt zu prüfen. Man wird auf Grund falscher Prämissen zu einem falschen Urteil geführt werden; das Urteil ist formal richtig gebildet, aber die Aussage ist falsch. Den ganzen Gedankenprozeſs wird man also erst dann richtig nennen, wenn man sich vorerst der Prämissen und

ihres richtigen Inhalts versichert hat. Es wäre ein Spiel des Witzes, mit Voraussetzungen, die als trügerisch erkannt sind, zu den Folgerungen zu schreiten. Wo das dennoch geschieht, kann es nur den Zweck haben, eben jene Voraussetzungen als unrichtig zu erweisen oder einen hypothetischen, immerhin als möglich angenommenen Thatbestand in seine Konsequenzen zu verfolgen. In vielen Fällen bedingt menschliche Unvollkommenheit, daſs uns absolut sichere oder zureichende Prämissen für unsere Schluſsurteile nicht gegeben sind. Wir sind dann genötigt, unseren Folgerungen eine bestimmte Wertung für die Erkenntnis angedeihen zu lassen; wir befinden uns im Bereiche des Wahrscheinlichen.

Die Gedanken der Wissenschaft wollen Erkenntnis darstellen, die des täglichen Lebens nicht minder, aber die letzteren haben einen gewissen Vorzug vor jenen. Das tägliche Leben giebt die Kriterien der Erkenntnis in einer so unmittelbaren Form, daſs kein Mensch lange Zeit darüber im Zweifel gehalten wird, ob er richtig gedacht hat oder nicht. Denn Leben und Handeln sind nicht von einander zu trennen; die Urteile des gemeinen Verstandes haben sich in den Willensbethätigungen zu erproben. Der Erfolg ist zwar kein so sicherer Prüfstein, wie die gewöhnliche Kritik anzunehmen geneigt ist, aber der gesunde Menschenverstand hat in den seltensten Fällen ein anderes Mittel, neben anderen Eigenschaften auch den Verstand des Handelnden zu schätzen. Jeder Miſserfolg veranlaſst aber den Handelnden, seine Urteile zu prüfen und, wenn nötig, zu berichtigen. Wäre alles vernünftige Denken zugleich Gewuſstes, dessen Sicherheit den Zweifel ausschlieſst, so würde unser Handeln ein unfehlbares sein. Glücklicherweise ist es nicht so. Vielmehr pflegen wir bei Willensbethätigungen, die sich auf ein sicheres Wissen stützen, kaum mehr von einem Handeln zu sprechen. Wenn wir ein Streichholz an einer Fläche schnell hinführen, so kennen wir den Erfolg im voraus. Alle ähnlichen Bethätigungen bedeuten uns im eigentlichen Sinne des Sprachgebrauchs kein Handeln, es sind, wie wir uns ausdrücken, Verrichtungen. Unsäglich öde wäre das Leben, das sich auf Verrichtungen beschränkte; einen Inhalt erhält es erst durch jene Aktivität, die, sich auf ein Wissen stützend, doch über den Erfolg im Ungewissen ist. Der Müſsiggänger handelt nicht, aber auch ihm legt sein Bedürfnis den Wunsch nahe, sich in seinen Wegen nicht auf ausgetretene Bahnen zu beschränken. Ist er nach irgend einer Richtung etwa politisch interessiert, so entscheidet er sich in aktuellen Fragen auch ohne eigenen thätigen Anteil für

diese oder jene Maſsregel, freut sich über ihren Erfolg oder ist gekränkt, wenn er ausbleibt. — Das Spiel heiſst nicht umsonst geschäftiger Müſsiggang. Es ist formales Handeln, da es gleichsam auf eine Abstraktion des Lebens hinauskommt und im allgemeinen sich keine anderen Zwecke vorsetzt, als die Zeit angenehm totzuschlagen.

Den objektiven Elementen des Wissens gesellen sich psychologische und ethische Momente hinzu, die unser Handeln beeinflussen. Erregung, Hoffnung, Furcht und Voreingenommenheit sind geeignet, unsere Entschlüsse zu leiten, und in vielen Fällen führt das Pflichtgefühl zu Handlungen, die der Verstand widerraten würde, sofern er nur über die Aussichten des Erfolgs um ein Urteil befragt oder vielmehr sofern nur die Erwägung des Erfolgs allein bestimmend sein würde.

Wenn wir von einer Ursache die Wirkung kennen, so erwarten wir die letztere, wenn wir die erstere konstatiert haben, unter einem Zwange, der nicht in den Dingen, sondern in den Gesetzen unseres Denkens liegt. Es ist nicht die Macht der Gewohnheit, die nach der Meinung Humes uns den Kausalbegriff aufnötigt. Wie sollte sonst ein einziger Fall, der unseren früheren Erfahrungen widerspricht, uns darüber aufzuklären imstande sein, daſs wir uns in der Statuierung des Kausalzusammenhangs getäuscht haben?

Sind die Gesetze des Denkens dem Subjekte eigen, so sind sie es doch in anderer Weise als jene Momente, die das Urteil des einzelnen Menschen als das erscheinen lassen, was wir seine subjektive Meinung zu nennen pflegen. Wo wir zugeben müssen, daſs alle Menschen notgedrungen dasselbe denken, begegnen wir einer Thatsache, die wir aus Ursachen nicht abzuleiten vermögen, die anzuzweifeln bedeuten würde, daſs wir es für möglich hielten, auf das Denken Verzicht zu leisten. Dieser Zweifel ist ein unmöglicher Gedanke; man kann ihn nur konstatieren als einen Widersinn, der unvollziehbar ist. Man nennt jene Gesetze apriorische, und ihr Sinn liegt in der Aufhebung individueller Verschiedenheiten, in der Möglichkeit objektiver Erkenntnis. Alle Verrichtungen beruhen auf objektiver Erkenntnis, die uns die Sicherheit des Erfolgs garantiert. Ihre Bedingungen müssen somit dieselben sein, von denen das Geschehen abhängt, und da wir uns bei der Betrachtung der Dinge unserer selbst nicht entkleiden können, so kann alle Objektivität keinen andern Sinn haben, als daſs sie in dem Zwange beruht, durch den in unserem Denken eine zwar logisch

trennbare, aber nur in der Vereinigung bedeutungsvolle Verschmelzung von Form und Inhalt zu stande kommt.

Es macht nun keinen Unterschied, ob wir in einem Urteil die Gewifsheit einer Thatsache aussprechen oder nur, dafs sie uns möglich oder wahrscheinlich erscheine; in beiden Fällen sind jene Gesetze wirksam. Sie lassen keinen Spielraum und gewähren keine Ausnahme. Wenn wir für unser Handeln eine Entscheidung treffen, so kann unser Verstand aus dem Felde geschlagen werden durch psychologische, rein individuelle Einflüsse, und das Urteil, in welchem nur Gründe und Gegengründe hinsichtlich des Erfolgs abgewogen werden, ist nur eine Abstraktion aus dem Getriebe unseres Seelenlebens. Wo vernünftige und vorsichtige Erwägungen vorherrschen, bei den „Verstandesnaturen", wie sie die Umgebung nennt, kommen doch auch psychologische Trübungen des Urteils vor; im guten Sinne gebrauchen wir dies Charakteristicum, wo ethische Gesichtspunkte den Weg in erster Linie bestimmen, mit einer etwas despektierlichen Klangfarbe hingegen, wo äufserer Vorteil die Leitung der Gedanken und Handlungen ausschliefslich in Anspruch nimmt. Auf die Kompliziertheit aller dieser Momente für die Beurteilung der Individuen und einer Gesamtheit von Individuen hinzuweisen, ist überflüssig. Jedermann weifs, wie sehr durch sie jenen Wissenschaften, die aus der Wechselwirkung menschlichen Handelns und systematischen Denkens hervorgegangen sind, wie der Nationalökonomie, die Verallgemeinerung ihrer Thatsachen erschwert wird.

Zusammenfassend mag also wiederholt werden, dafs die allem menschlichen Thun — den Begriff im weitesten Sinne genommen — zugrundeliegenden logischen Elemente nicht allein überall dieselben sind, sondern dafs auch ihre Verknüpfung bei allen Menschen mit Notwendigkeit die gleiche ist. Die Verschiedenheit der Urteile bei diesem und jenem über denselben Gegenstand beruhen eben nur darauf, dafs die Voraussetzungen, welche im individuellen Verstande für das Urteil verwandt werden, verschiedene sind nach der Kenntnis und Weise des denkenden Subjekts. Wo indessen für alle Individuen schon im Gegenstande selbst eine Nötigung zu eindeutiger Auffassung liegt, kann eine Verschiedenheit der Meinungen überhaupt nicht entstehen. Sehen wir ganz vom Inhalte der Urteile ab, prüfen wir lediglich das formale Denken, so konstruieren wir gewissermafsen eine reine Logik, und hier wie in der Mathematik, in der völlig objektive, d. h. für alle Menschen übereinstimmende Anschauungen dem Urteil unterliegen, kann eine Diskrepanz nicht auftreten.

Formale Logik und Mathematik sind die einzigen Disziplinen von allgemeiner, durch keinerlei subjektive Eigenheit einzuschränkender Gültigkeit. Die erstere ist als ein Inventar der Formen von dem Entwicklungsgange der Mathematik historisch abhängig gewesen, aber sie ist die allgemeinere Disziplin. Die Mathematik hat mehr als jede andere Wissenschaft, abgesehen von ihrem formalen Gegenstande, Veranlassung gehabt, sich des logischen Gerippes zu bemächtigen, so dafs sie in ihren fundamentalen Sätzen in die Logik hineinragt. Aber ihre logischen Elemente, die sie immer in derselben Weise bei allen Problemen verwendet, sind doch nur ein Teil und nicht der ganze Inhalt der Logik. Für die Anwendung beider Wissenschaften in der Erfahrung stellt sich die erkenntnistheoretische Logik die Aufgabe, die Bedingungen zu untersuchen, an welche ein richtiges Wissen geknüpft ist. Indem sie hier nur feststellen will, was auf die Anerkennung aller Menschen Anspruch erhebt, scheidet sie alles aus, was dem einzelnen Subjekt zugesprochen werden müfste.

Giebt man obige fast selbstverständlich erscheinende Überlegung zu, so wird sich auch für jede Äufserung unseres Willens eine logische Grundlage finden, über die, wenn man sich erschöpfend ausgesprochen hat, bei den Menschen volle Einigkeit zu erreichen sein mufs. Die Frage nach der Freiheit des Willens braucht dabei gar nicht gestellt zu werden. Wir negieren nur eine Freiheit des unsere Handlungen wesentlich bestimmenden Denkens, wenn man diesen Begriff im Sinne willkürlicher Elemente des Denkens, über deren Inventar wohl, über deren Bedeutung für das Erkennen aber nicht gestritten werden kann, und einer willkürlichen Kombination in Urteil und Schlufs interpretieren will. Freilich: „denken kann ich, was ich will, wenn es sich nur nicht logisch widerspricht.“ Der Nachsatz hebt die Möglichkeit des logisch Unmöglichen, des formalen Widersinns, völlig auf. Auch im „Spiel des Witzes“ müssen die formalen Gesetze befolgt werden, wofern nicht etwa seine Pointe darin liegt, dafs Widersinniges gesprochen oder geschrieben und der Witz im formalen Widersinn begründet wird. Wenn es im Studentenliede heifst:

„Wenn ich einmal der Herrgott wär',
Mein erstes wäre das,
Ich nähme meine Allmacht her
Und schüf' ein grofses Fafs.
Ein Fafs so grofs als diese Welt,
[illegible] ein“,

so ist dieser Vers ein Spiel des Witzes. Aber logisch richtig ist alles, was in diesen Zeilen gesagt ist. Im Begriffe der Allmacht liegt die Möglichkeit, so zu handeln, wie es der durstige Sänger wünschte. Dagegen giebt der bekannte Scherz

„Ich wollt', ich wär' ein Louisdor,
Dann kauft' ich gleich mir Bier davor"

einen Witz, der sich auf den logischen Widersinn gründet. Dem Begriff des Louisdor widerspricht es, dafs er überhaupt etwas wollen kann, und ich selbst kann nicht denken, dafs ich ein Louisdor sei, denn in diesem Gedanken würde ich mein Denken selbst aufheben müssen. Vielleicht, dafs ich denken könnte, dafs ich nicht denken kann, wird man als einen richtigen Gedanken noch hinnehmen wollen, aber dafs ich nichtdenkend mir etwas für mich selbst kaufen könne, enthält einen kompletten Widersinn, da jedes Kaufen ein Denken sicherlich voraussetzt. Wir lachen über den Unsinn um so mehr, je feierlicher und bedeutsamer die Form ist, die ihn uns zumutet. Ohne den Rhythmus der Verse würden uns jene Scherze kaum ein Lächeln abnötigen.

Auch in ernsterem Sinn kann ich vieles denken, das nur in sich logisch gefestigt ist, ohne einen realen Untergrund zu haben. Aber wissenschaftliches Denken ist das nicht, sofern damit auf ein Erkennen der Dinge abgezielt wird. Für die nichteuklidische Geometrie liegt die logische Begründung in der Thatsache, dafs eine andere Raumanschauung als die unsere sehr wohl denkbar ist. Auf einen logischen Widerspruch stofse ich hier nicht, und wenn ich die Eigenschaften einer auch nur hypothetischen Anschauungsform untersuche, so wird unsere Erkenntnis wenigstens um Resultate bereichert, die sich auf die Möglichkeiten unseres Denkens und Anschauens beziehen. Die Gewalt, welche ich unserer Anschauungsform anthue, beweist doch, dafs bis zu einem gewissen Grade auch die Anschauung, die wir haben, und die uns die Objektivität der Aufsenwelt sichert, einer modifizierten Art in bestimmter Weise zu Hülfe kommen und sie theoretischer Bearbeitung zugänglich machen kann. Auch das Interesse läfst sich nicht leugnen. Wenn Helmholtz das Wesen von zweidimensionalen Geschöpfen untersucht, die sich auf oder in der Kugeloberfläche zu bewegen beschränkt sind, um eine bestimmte Ansicht über den Raum überhaupt zu erhärten, so begegnen wir nirgends logischen Widersprüchen. Wir gelangen zwar nicht zur Erkenntnis zwei-

dimensionaler Wesen, schliefsen vielmehr von der Anschauung geleitet aus fingierten Prämissen; aber die Frage, ob und wie eine solche chimärische Beschaffenheit ihre Träger in der räumlichen Auffassung beeinflussen würde, ist an sich interessant und wäre es auch dann, wenn sie nicht lediglich unter dem Gesichtspunkte eines Mittels zum Zweck aufgeworfen worden wäre.

Die Fiktion einer Freiheit unserer Gedanken, wo diese selbst nur logisch, d. h. durch sich selbst eingeschränkt sind, ist etwas Denkmögliches; denn sonst würde ich sie weder aufstellen noch durch Beispiele nachweisen können. Von dieser Freiheit, auf der schliefslich jede Methodik zur Bestimmung des Wirklichen innerhalb des Möglichen beruht, machen wir einen tausendfältigen Gebrauch, indem wir willkürliche Voraussetzungen in ihre Konsequenzen verfolgen.

In der Kunst verlangen wir eine strenge Logik auch da, wo der Künstler sich freischaffend einen Gegenstand wählt, dessen Realität nur in sich und in der Darstellung gegründet ist. Hierfür mag nur ein Beispiel angeführt werden. Als Moritz von Schwind mit der Komposition der Wartburgfresken beschäftigt war, nahm man am Heiligenscheine der Elisabeth und an der Darstellung der Wunder Anstand. Schwind aber liefs sich nicht beeinflussen. „Die heilige Elisabeth“ — schrieb er — „ist und bleibt die heilige Elisabeth mit dem Wunder der Verwandlung ihrer Brote in Blumen, und ich würde auf die Zumutung, das wegzulassen, ebensowenig eingehen können und dürfen, als der Architekt einen Turm auf eine Mauer setzt, die ihn nicht tragen kann, oder ein Maler, der Dr. Luther darstellt mit Hinweglassung seiner Thätigkeit als Reformator.“ Auch an Goethe mag erinnert werden: „Und was an einem Gemälde am unerträglichsten ist, ist Unwahrheit. Ein Märchen hat seine Wahrheit und mufs sie haben, sonst wäre es kein Märchen.“ Der Künstler ist frei in der Wahl seiner Gebilde; hat er aber die Wahl getroffen, so steht er im Banne seiner Objekte, und der Beschauer wird nur dann geniefsen, wenn ihm die freien Ideen des Künstlers verständlich sind. Wenn aber in der Kunst der Gegenstand den freien Spielraum einengt, so wäre es ein barer Widersinn, gegenüber den in der Aufsenwelt gegebenen Objekten der Erkenntnis die Freiheit der Gedanken zu behaupten. Das Erkennen setzt nicht nur den Gegenstand voraus, sondern es wird von ihm geleitet, und hier stellen wir den Anspruch allgemeiner Geltung im höchsten Sinne.

In der Wissenschaft, die ihren Gegenstand zwar selbständig bestimmt, aber doch nur dadurch sich charakterisiert, dafs sie unsere Kunde von den Dingen einerseits ordnen, andererseits vergröfsern will, mufs also von vornherein alles ausgeschlossen sein, was aus unserer nicht auf gegenständlicher Begründung ruhenden Willkür hervorgegangen ist. Wir bemerken dies ausdrücklich, um auch für den Gebrauch der Methoden den Anspruch zu erheben, dafs sie nicht allein logisch in sich gegründet sind, sondern dafs sie auch aus den Gegenständen und ihrer Art, wenn nicht immer mit Notwendigkeit, so doch als ihnen angemessen sich ableiten lassen. Namentlich in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man in durchaus ernsten und wertvollen Schriften dem Vorwurfe der Kritik, dafs man vielfach willkürlich verfahre, entgegengehalten, dafs diese Rechnung überhaupt nur auf einer Willkür beruhe. Sofern dies richtig wäre, hätte man Verzicht zu leisten. Wenn man unter verschiedenen Methoden, die logisch gleich sicher fundiert sind, die Wahl trifft, handelt man allerdings nach seinem Willen. Eine Methode indes, die nur auf Willkür beruhte, auch wenn sie, wie man wohl gesagt hat, die Willkür auf Regeln brächte, wäre immer zu verwerfen. Wenigstens ist nicht einzusehen, wie sich die Gegenstände einer Willkür fügen könnten.

Ebenso wären Methoden abzuweisen, die psychologischen Ablenkungen einen Raum beliefsen; auch das ist von jener Disziplin gesagt worden, dafs sie nur subjektive Bedeutung habe. Aber was nur für den Einzelnen oder für eine Gesellschaft so oder anders disponierter Individuen gelten würde, ist kein Erkennen und kann es ebensowenig fördern. Das Individuelle mufs ausgeschieden werden; die Allgemeingültigkeit ist das notwendigste Merkmal jeder Wissenschaft.

In der Kunst werden viele schon durch den Gegenstand ausgeschlossen; die Musik Wagners vermag viele Musikverständige nicht zu gewinnen, die Musik überhaupt schliefst von dem Verständnis alle aus, denen es an Gehör mangelt.

Nationale Unterschiede sind imstande, auch den Dichter auf sein Volk zu beschränken, und die verschiedenen Richtungen des Geschmacks innerhalb derselben nationalen Grenzen brauchen nicht mit Notwendigkeit einer allgemeinen Einheit zuzustreben.

Philosophische Anschauungen über die höchsten Ideen, welche die Menschen bewegen, sind wechselnd, und wenn die Metaphysik Versuche in grofser Zahl geliefert hat, die letzten Dinge zu er-

gründen, so kann sie doch nicht zur Erkenntnis, höchtens zum Glauben führen. So fest das Gebäude sich zu präsentieren vermag, so locker ist doch die Fundamentierung, und Willkür, Phantasie und Hypothesenbildung, die sich der Kontrole infolge der mangelnden Anschauung entzieht, berauben die Systeme nicht allein einer allgemeinen Anerkennung, sondern sie machen diese als eine sich notwendig ergebende unmöglich. Der consensus omnium ist kein absolutes Kriterium der Wahrheit, aber er ist notwendig, wo unsere Kenntnis vermehrt werden soll. Bleibt er bei irgend einer Materie aus, so ist immerhin möglich, daſs sich die Majorität irrt, aber in der Wirkung ist dieser consensus das einzige Kennzeichen für das, was wir als objektiv gültig benennen. Auch gegen Majoritäten wird sich das Zutreffende Bahn brechen, und wenn nicht, so muſs doch wenigstens seine Möglichkeit in formaler Weise eingesehen werden können.

Will man diesen Ausführungen zustimmen, so darf man nicht auſser acht lassen, daſs abgesehen von den Beispielen der formalen Logik und der Mathematik, Objektivgeltendes und Wahrheit schlechthin sich weder decken noch jemals decken können. Ein allgemeines materiales Kriterium der Wahrheit kann es nach KANT[1]) überhaupt nicht geben, weil dieses eben wegen seiner Allgemeinheit von allem Besonderen der Objekte abstrahieren müſste. Dabei würde von ihm verlangt werden, zu entscheiden, ob ein Erkenntnis gerade mit dem Objekte, worauf es bezogen wird, übereinstimme; das würde den Widersinn geben, daſs jenes Kriterium allgemein sein, d. h. von jedem Unterschiede der Objekte abstrahieren und doch auch zugleich als ein materiales Kriterium auf diesen Unterschied sich beziehen sollte.

Umgekehrt kann auch ein Urteil wahr sein, ohne daſs ihm objektive Geltung in dem Sinne zuzusprechen sein müſste, daſs diese von allen notwendig einzusehen und einzuräumen wäre. Überall, wo wir etwas Thatsächliches aussagen, sei es auf Grund der Überlieferung oder auch aus unmittelbarer Anschauung, ohne den Zusammenhang zu kennen, aus welchem es hervorgegangen ist, haben wir wohl objektiv Geltendes im Urteil verwandt, aber dieses letztere selbst ermangelt des Zwanges, mit welchem es von anderen wiederholt werden müſste. Wenn bis zu GALILEI immer und immer wieder beobachtet wurde, daſs in der Saugpumpe das Wasser den

[1]) Logik. KIRCHMANNS Ausg. S. 55.

luftleeren Raum zu erfüllen suchte, so gab diese Erscheinung ein Urteil, von dessen Richtigkeit sich zwar jeder überzeugen konnte, aber die Notwendigkeit brauchte Niemand auf Grund des „horror vacui" einzusehen. Denn diese „Hypothese" übersetzte nur die ursprünglich beobachtete Thatsache — fast möchte man sagen ins Lateinische — in eine andere, die im Grunde noch weniger überzeugend war, als jene einzelne, weil sie viel allgemeiner und nur auf das negative Argument, dafs sich nirgends ein leerer Raum in der Natur vorfinde, gestützt war. Vor GALILEI und TORRICELLI hatte das thatsächlich Beobachtete den Charakter der Wahrheit in dem Sinne, in dem wir denselben auch heute aussagen. Nehmen wir an, die Hypothese des „horror vacui" wäre eine wirklich fundierte gewesen, so würde auch dem Satze: „Das Wasser sucht den leeren Raum auszufüllen" als einem mit Wahrscheinlichkeit herrschenden die objektive Geltung nicht abzusprechen gewesen sein. Dafs, wie bekannt, weder das Thatsächliche vollständig beobachtet noch die Begründung eine richtige war, und dafs wir heute anders urteilen und erklären, ist nur ein Beweis dafür, dafs ein Zustand der Relativität in unserem gesamten Erkennen herrscht, der unserer Menschlichkeit entspricht und unüberwindbar ist.

Wir haben das Beispiel angeführt, weil man diese Relativität bei allen Urteilen, die sich auf Wahrscheinlichkeitsargumente stützen, gewissermafsen in das Subjekt zu verlegen und so die Objektivität des sicher Behaupteten in einen logischen Gegensatz zum Wahrscheinlichen zu bringen versucht hat; ein Irrtum, der namentlich in den subjektiven, psychologischen Ablenkungen unserer vernünftigen Erwartung zukünftiger Geschehnisse eine scheinbare Begründung findet, aber auch dann hervorgerufen wird, wenn man den Standpunkt des Urteilenden, der immer ein objektives Merkmal ist, mit einer subjektiven Bedingung verwechselt.

Es ist indessen der Anspruch zu erheben, dafs sich das Wahrscheinlichkeitsurteil in derselben Weise begründen lasse, wie das mit Sicherheit ausgesprochene. Dieses wie jenes kann natürlich nur so ausfallen, wie der Stand der Kenntnisse der Allgemeinheit und des Einzelnen es zuläfst. Irrtum ist hier und dort in demselben Sinne möglich; lassen wir indessen für das Wahrscheinlichkeitsurteil Subjektivität oder auch völlige Willkür als berechtigte Eigentümlichkeiten zu, so hört jeder Streit, aber auch jede objektive Erkenntnis auf, eine Konsequenz, die um so eher zu vermeiden sein wird, als eben die mit der Einschränkung der Wahrschein-

lichkeit gemachte Aussage nicht nur formal die allgemeinere, sondern auch überall in den empirischen Wissenschaften die bei weitem vorherrschende ist, ganz davon abgesehen, dafs die vorsichtigere Form dem Gericht der thatsächlichen Widerlegung nicht immer ausgesetzt ist.

Formal ist das Wahrscheinlichkeitsurteil das allgemeinere, weil die Wahrscheinlichkeit alle Grade und somit auch die Gewifsheit einschliefst. Unsere Sprache läfst eine genaue Bezeichnung des Grades nicht zu, und nur in einer geringen Zahl von Fällen gestattet der Gegenstand die Graduierung. Das fordert auf, nach einem objektiven, durch die Zahl bestimmten Mafse zu suchen, eben, wo der Gegenstand zuläfst. Bei vielen begrifflichen Bestimmungen müssen wir für graduelle Unterschiede uns mit den dürftigen Abstufungen der Sprache begnügen, wie sie die grammatische Form der Komparation z. B. bei den meisten Eigenschaftsbegriffen ergiebt. Verschiedene Nüancen des Rot, der Süssigkeit würden indessen auch objektive Bestimmungen zulassen; im ersten Falle kann man die Schwingungszahl der Ätherwellen ermitteln, im letzteren vielleicht eine Angabe über den relativen Zuckergehalt machen. Es wird später zu untersuchen sein, inwieweit sich auch für das Attribut der Wahrscheinlichkeit eine solche objektive, durch Gröfsenbestimmung vermittelte Graduierung herstellen lassen kann.

Nach dem vorigen kann wohl behauptet werden, dafs ein Urteil, welches nach irgend einem Grade der Wahrscheinlichkeit Begriffe miteinander verknüpft, weder von willkürlichen Annahmen, noch von subjektiven Einflüssen geleitet sein darf, um objektive Geltung zu gewinnen. Kann man nur vom Stande der eigenen Kenntnis aus einen Grad angeben, mit welchen man Zutreffen oder Nichtzutreffen der Aussage als wahrscheinlich prädiziert, so würde ein Verstand, der alle zur Zeit anerkannten Ergebnisse aller menschlichen Forschung beherrschte, nicht in einer mehr objektiven Weise, aber darum nur ebenso relativ wie jeder andere zu urteilen imstande sein. In beiden Fällen würde man auf eine Verbesserung des Urteils, im ersteren von den Zeitgenossen, im lezteren von der Zukunft gefafst sein müssen.

Überall müssen wir des Irrtums gewärtig sein; um die Aufgabe zu präzisieren, wollen wir aber bei den folgenden Untersuchungen von psychologischen Trübungen des Urteils ein- für allemal absehen. Dafs der Optimist anders als der Pessimist, der Sanguiniker anders als der Melancholiker seine Erwartung äufsert,

ist logisch bedeutungslos. Die psychische Stimmung kann auch das Urteil der Gesamtheit für einige Zeit völlig alterieren, aber die Logik mufs ihr gegenüber kalt bleiben wie der Arzt, der die hoffnungsfreudigen Aussagen seines Patienten ruhig mit anhört, ohne sich von der ernsten Diagnose zurückhalten zu lassen. Als die bekannte Kochsche Entdeckung die Gemüter froh erregte, mufste die Logik zurücktreten, die nicht augenblickliche und darum scheinbare Erfolge, sondern vieljährige Erfahrungen für ein einigermafsen gegründetes Urteil erfordert hätte. Während diese Zeilen geschrieben werden, durchläuft die Nachricht von der glücklichen Heimkehr eines kühnen Polarforschers die ganze civilisierte Welt. Liest man die Vermutungen, die sich an sie knüpfen, so kann man bemerken, dafs lediglich die Möglichkeit dazu verleitet, die Nachricht nicht nur für wahrscheinlich, sondern auch für wahr zu halten. Gewifs, auch wir wünschen dem kühnen Nansen eine Rückkehr und jenen schönen, einzigen Erfolg, der versprochen wird; man darf ihn aber nach Lage der Dinge nicht eher als nur wahrscheinlich bezeichnen, bevor nicht sicherere Kunde einläuft[1]).

Ohne uns tiefer auf die Frage einzulassen, welche Grenzen unserer Erkenntnis überhaupt gesteckt sind, dürfen wir wohl die wesentlichen Resultate der Kritik Kants als allgemein zugestanden ansehen. Die Möglichkeit, vom Übersinnlichen etwas auszusagen, wird von ihm bekanntlich verneint, wenn der Anspruch auf ein objektives Erkennen erhoben wird. Jede Metaphysik, die den letzten Ursachen der Dinge nachspürt, gründet zuletzt auf Voraussetzungen, die sich an den Glauben wenden. Will man sich ihr also hingeben, so mufs man die Fundamente völlig annehmen. Diese Bemerkungen erweisen sich als nötig, wenngleich in allen historischen und den Naturwissenschaften lediglich die Prinzipien Kants — man mag im einzelnen oder auch im all-

---

[1]) Wie bekannt, ist Nansen in die Heimat zurückgekehrt. Über den Zusammenhang jenes voreiligen Gerüchts, auf das sich obige Worte beziehen, mit dem wirklichen, allgemein bejubelten Ereignis ist in der Presse nichts veröffentlicht worden. Den Nordpol, wie das Gerücht verkündete, hat Nansen nicht erreicht, aber alle Einzelheiten, die berichtet werden, sind nicht ungeeignet, in einer Abhandlung über Wahrscheinlichkeit erwähnt zu werden. Die Begegnung mit Jackson in polaren Regionen, die fast gleichzeitige Rückkehr des Fram sind solche seltene Koincidenzen, die trotz einer minimalen apriorischen Wahrscheinlichkeit wirklich werden.

gemeinen seiner Lehre abhold sein — thatsächlich maſsgebend sind. Weder der Historiker noch der Naturforscher wird die Dinge, die im Himmel und auf Erden auſserhalb unserer Schulweisheit existieren, in den Bereich seiner Forschung einbeziehen wollen, wenn sie nicht von vornherein als so geartet anzusehen sind, daſs wenigstens die Möglichkeit vorliegt, sie in irgend einer Weise der Anschauung zugänglich zu machen und also doch wohl früher oder später der Schulweisheit einzuverleiben. Auch der Spiritismus begnügt sich nicht mit dem bloſsen Glauben, sondern er will seine Träume ganz roh empirisch beweisen. Seine Beweisgründe pflegen sich immer in empirische Thatsachen zu hüllen. Jede neue Entdeckung der Physik — vielleicht jetzt die der X-Strahlen — liefert die ebenso plausibel klingende als völlig unzutreffende Exklamation: Wer hätte das früher für möglich gehalten, und warum soll es denn nicht dies und jenes geben, warum sollen denn die Geister nicht auf den Tischen oder darunter klopfen oder verschlossene Schiefertafeln mit schlechtem Englisch oder in sächsischem Dialekt bekritzeln können? Nun, wenn sie sich den Gesetzen unseres Denkens und Anschauens fügen wollen, so ist gar nichts gegen sie einzuwenden. Giebt es vollgültige Beweise für das spukhafte Treiben, so wird man versuchen müssen, sich auch in der Wissenschaft mit ihm abzufinden. Vielleicht darf hier an einige nicht unzeitgemäſse Worte Kants in der Kritik der reinen Vernunft (S. 232 Kirchmann) erinnert werden, wo er über neue Begriffe von Substanzen, Kräften, Wechselwirkungen spricht, deren Möglichkeit mangels Erfahrungen „gar keine Kennzeichen für sich hat“: „Dergleichen gedichtete Begriffe können den Charakter ihrer Möglichkeit nicht so, wie die Kategorien, a priori, als Bedingungen, von denen alle Erfahrung abhängt, sondern nur a posteriori, als solche, die durch die Erfahrung selbst gegeben werden, bekommen, und ihre Möglichkeit muss entweder a posteriori und empirisch oder sie kann gar nicht erkannt werden. Eine Substanz, welche beharrlich im Raume gegenwärtig wäre, doch ohne ihn zu erfüllen (wie dasjenige Mittelding zwischen Materie und denkenden Wesen, welches einige haben einführen wollen), oder eine besondere Grundkraft unseres Gemüts, das Künftige zum voraus anzuschauen (nicht etwa bloſs zu folgern), oder endlich ein Vermögen desselben, mit anderen Menschen in Gemeinschaft der Gedanken zu stehen (so entfernt sie auch sein mögen), das sind Begriffe, deren Möglichkeit ganz grundlos ist, weil sie nicht auf Erfahrung und deren bekannte

Gesetze gegründet werden kann und ohne sie eine willkürliche Gedankenverbindung ist, die, ob sie zwar keinen Widerspruch enthält, doch keinen Anspruch auf objektive Realität, mithin auf die Möglichkeit eines solchen Gegenstandes, als man sich hier denken will, machen kann." Bevor also jene empirischen Daten geliefert sind, hätte die vierte Dimension erst nachzuweisen, dafs sie überhaupt objektiv möglich ist; für die Gesetze unseres Denkens und Anschauens, unter deren Zwang wir jetzt urteilen, und wie wir meinen allein urteilen können, wären andere in überzeugender Weise zu präsentieren, so dafs sich jeglicher Verstand durchaus unterzuordnen hätte.

Erstreckt sich dann irgend eine Behauptung bis in die neue Sphäre, so werden wir ihr, sofern sie sich in objektiver Weise legitimiert, den Charakter der Erkenntnis, eines Wissensinhalts nicht absprechen dürfen.

Worauf wir abzielen, ist folgendes. Ein objektiv gültiges Urteil, das einen Wissensinhalt geben soll, ist an die Schranken gebunden, in die uns der anerkannte Stand der Erkenntniskritik und das vorhandene Wissen selbst bannt. Auch wo wir etwas in objektiver Weise mit einem irgendwie präzisierten Grade von Wahrscheinlichkeit aussagen, wird verlangt werden können, dafs wir wenigstens unserem Vermögen nach in den Stand kommen könnten, auch die Gewifsheit auszusagen. Eine geschichtliche Thatsache, über welche absolute Klarheit zu verbreiten unmöglich scheint, wird vernünftigerweise Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unterliegen, aber dafs die Seele sterblich oder unsterblich ist, werden wir als Erkenntnisurteil weder mit Gewifsheit noch mit einem Grade von Wahrscheinlichkeit aussagen können. Wir können hier nur glauben oder nicht glauben; auch soll zugegeben werden, dafs das Schwanken zwischen Glauben und Nichtglauben alle Grade des Überzeugtseins zulassen mag, aber alle Gründe, welche dafür oder dagegen ausgesprochen werden, sind lediglich Begriffsextraktionen, analytische Urteile, die keinerlei Erweiterung unseres Wissens zulassen. Gleichwohl hat man versucht, auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung einen Beweis für jenes Postulat des Glaubens zu stützen. Der Glaube aber wurzelt nicht im Verstande, und seine wahren Gründe entziehen sich jeder logischen Analyse. Die Wahrheit des Glaubens ist eine andere als die des pythagoreischen Satzes.

Nehmen wir an, dafs wir ein menschliches Wesen kennen lernten, dem religiöse Begriffe völlig fremd wären, und dafs wir

ihm den Begriff Gottes vermittelten. In vollständiger Indifferenz würde von demselben wohl das Urteil abgegeben werden, daſs es entweder einen Gott giebt, oder daſs es keinen giebt, daſs aber beides gleich wahrscheinlich, also auch gleich unwahrscheinlich sei.

Ein solches Urteil wäre ein „Hauch der Stimme“, eine völlig leere Form für einen unausdenkbaren Inhalt, der unangemessene Ausdruck eines völlig subjektiven Zweifels. Sein und Nichtsein sind Prädikate, die nur innerhalb der Schranken unserer Erkenntnis Sinn haben; für den Begriff allein sagt er selbst schon, daſs er ist, daſs ich ihn habe, aber er kann leer sein, so daſs nichts Gegenständliches ihm entspricht. Ein Begriff, den ich nicht vollziehen kann, ist ein logischer Widerspruch, also überhaupt nichts. Jedes Existentialurteil verlangt wenigstens die Möglichkeit, dem Begriff in der Anschauung eine Vertretung zu schaffen; ohne sie kann kein Urteil mit dem Anspruch auftreten, auch von anderen anerkannt zu werden. Eben diese Möglichkeit in der Anschauung muſs nachgewiesen sein, damit von einem Erkenntnisurteil die Rede sein könne.

Das Wahrscheinliche als das, was in uns die Täuschung der Wirklichkeit hervorruft, meinen wir niemals, wenn von jenen Urteilen die Rede ist, deren Begründung zur sicheren Aussage nicht zureicht. Dort giebt es auch schwerlich etwas, was eine graduelle Abstufung ermöglichte. Von den Sinnestäuschungen, in welchen wir unseren Empfindungen eine falsche Deutung beilegen bis zum Miterleben der Dichtung bei der Lektüre und im Theater und von diesen zeitlich begrenzten Bewuſstseinserscheinungen bis zum vollkommenen Wahn des Geisteskranken scheinen nur qualitative Unterschiede zu gelten. Gemein ist allen diesen Zuständen, daſs die formal logischen Gesetze aufrecht erhalten bleiben; auch im Traum urteilen wir logisch; nur wird der Faden nicht ausgesponnen, sondern vorzeitig von anderen Gedanken zerrissen.

Was vom Wahrscheinlichkeitsurteil verlangt wird, ist kurz gesagt folgendes. Die Prädizierung eines Wahrscheinlichkeitsgrades ist wie jedes Verstandesurteil überhaupt eine spontane, objektive That unseres Denkens; die Gründe, die unserem Denken den Anlaſs zur Aktion geben, müssen ebenfalls objektiver Natur sein, und endlich muſs die Aussage selbst so beschaffen sein, daſs auch das, was nur zum Teil begründet erscheint, in objektiver Gewiſsheit zu erkennen wenigstens möglich ist.

Man pflegt nun im gewöhnlichen Leben wie überhaupt den Begriff der Wahrscheinlichkeit zuweilen in einem engeren Sinne zu

benützen, indem man eine Aussage dann wahrscheinlich nennt, wenn die Gründe die Gegengründe überwiegen. Die Schwierigkeiten, welche die Abwägung unserem Denken bereitet, sind es nicht allein, die den Anschein erwecken, dafs an einer Objektivität solcher Urteile gezweifelt werden müsse. Zunächst ist es schwer, die Anforderung zu erfüllen, Gründe und Gegengründe so vollständig anzugeben, dafs mit der völligen Widerlegung der letzteren auch eine nicht nur überzeugende, sondern auch unanfechtbare Begründung der Aussage im Sinne der Gewifsheit hergestellt werden kann. Aber diese Schwierigkeit trifft nicht minder den gröfsten Teil aller Urteile, die mit voller Bestimmtheit ausgesagt werden. Gewifs pflegen in weitaus der Mehrzahl der Fälle nur die vollendeten Thatsachen zu sein, welche sich unserem Denken in unmittelbarer Weise zur Verarbeitung erbieten; überall aber, wo wir ein Geschehen, an das sie sich knüpfen, erklären wollen, bleibt ein „schädlicher Raum", für den wir nicht einzustehen vermögen. Auch in den mit Bestimmtheit ausgesprochenen Sätzen sind die Gründe selbst häufig nur zum Teil gewährleistet; das trifft natürlich erst recht für das Wahrscheinliche zu, und die Analyse würde für Gründe und Gegengründe wieder dieselben Wege zu gehen genötigt sein, die sie für das resultierende Urteil einzuschlagen hat. Angesichts der tausendfach verschlungenen Fäden, die unser Denken zu entwirren hat, bleibt somit für die Beschreibung unseres geistigen Verhaltens nichts übrig, als zu Abstraktionen seine Zuflucht zu nehmen, zu Schematen des Denkens, die sich überall nachweisen lassen werden.

Gründe und Gegengründe sollen gegeneinander abgewogen werden. Sie sind also nicht allein auf ihre Wahrheit, sondern auch auf ihre Bedeutung für den Inhalt der Aussage zu prüfen, und auch hierbei treten dieselben, zwar an sich einfachen, aber in ihrer Totalität so verwickelten Denkoperationen in Wirkung, die wir schematisieren möchten.

Wenn wir also z. B. sagen wollten: Dieser Gedankengegenstand $A$ gehört wahrscheinlich unter den Begriff $B$, weil die Urteile

$$\alpha_1\ \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_\nu$$

dafür, die Urteile

$$\beta_1\ \beta_2 \cdots \beta_\lambda$$

dagegen sprechen, so würde vorauszusetzen sein, dafs Gründe und Gegengründe völlig sicher, völlig gleichwertig und die $\beta$ wirklich so beschaffen sind, dafs ihre Widerlegung die vollbegründete Ge-

wissheit zu ergeben hätte. Ist sodann auch die Zahl der $\alpha$ gröſser als die der $\beta$, so sehe ich nicht ein, daſs irgend ein menschlicher Verstand dem Urteil auszuweichen vermöchte. Spielten sich bei einer Zahl von Menschen dieselben Elementarprozesse im Denken und Erkennen ab, so müſsten alle zu denselben Resultaten gelangen. Dieser Satz ist tautologisch, aber er ist es doch nicht mehr, als wenn ich ihn etwa auf das Geschehen in der Natur übertrage. Niemand wird aber aus der Thatsache, daſs in der Natur hier dieser Prozeſs sich abspielt und dort ein anderer, zu schlieſsen geneigt sein, daſs in der uns umgebenden Welt die planlose Willkür herrsche oder auch nur deren Annahme berechtigt sei.

Gewiſs, in der Wirklichkeit hält der eine für wahrscheinlich, was dem andern sehr zweifelhaft ist, weil ja immer nur für ein verhältnismäſsig enges und ausgetretenes Gebiet die Marschroute den Gedanken vorgezeichnet, und weil wieder dieses kleine Territorium im Verhältnis zu den Wegen, die der Einzelne wandelt, so groſs ist, daſs nur wenige dazu gelangen, den gröſseren Teil völlig zu überschauen.

Das Schema ist nirgends in seiner Einfachheit anzuwenden, wo es sich um wissenschaftliche Forschung handelt, und nur da, wo sowohl das Wahrscheinlichkeitsurteil selbst wie alle seine Prämissen aus Gröſsenbeziehungen allein zu schöpfen sind, ist es ohne Zwang zu nützen.

Was indessen für das Wahrscheinlichkeitsurteil gilt, läſst sich ebensowohl auch für alle anderen behaupten. Auch für diese gilt in der Regel, daſs sie sich mit den Schematen der Logik nicht decken, es sei denn, daſs wir es mit rein mathematischen Urteilen zu thun haben, die den Vorzug haben, daſs ihr Inhalt nicht in unserer Vorstellung von den Dingen, sondern in unserer Anschauung rein, objektiv, zwingend und erschöpfend enthalten ist.

Im allgemeinen fordern, wie gesagt, alle jene Urteile $\alpha$ und $\beta$ wieder dieselben Untersuchungen, die wir an das zusammenfassende „$A$ ist wahrscheinlich $B$" anknüpfen; sie werden also auch den allgemein zu stellenden Bedingungen genügen müssen. In unserem Schema sollen aber nach unserer Voraussetzung gerade diese $\alpha$ und $\beta$ mit voller Gewiſsheit ausgesagt werden. Vielleicht ist ein einfaches Beispiel am Platze.

Angenommen, man sollte entscheiden, ob eine Münze, die in natura vorliegt, aus einer bestimmten Münzstelle M hervorgegangen ist. Bekannt und sicher sei, daſs Münzen von genau derselben

Beschaffenheit auch von einer und nur von einer andern, nämlich der Stelle N, ausgegangen sind. Die Jahreszahl, welche die Münze trägt, entspreche einer notorischen Prägung von M, während sich weder nachweisen noch als unmöglich darthun läfst, dafs auch von N in demselben Jahre Münzen geschlagen worden sind. Hingegen sei wiederum bekannt, dafs in dem Prägejahr der konkurrierende Münzort N eine Belagerung auszuhalten hatte. Nach diesen Daten, auf welche sich unsere Kenntnis ausschliefslich beschränken soll, würde man es als wahrscheinlich ansehen, dafs nicht N, sondern M die Münzen geliefert hat.

Vergleichen wir die Grundlagen unseres Urteils mit dem Schema, so wird man leicht bemerken, dafs es ihm nicht vollständig entspricht. Zunächst ist klar, dafs unser negatives Argument: Die Prägung ist für die Stelle N nicht nachweisbar, nach seinem Werte mit den positiven Gründen nicht vergleichbar ist. Es wird durch die Thatsache verstärkt, dafs die Bewohner jenes Orts in dem Jahre anderes eher zu thun hatten, als Münzen zu prägen, aber auch hierfür können wir doch nur als sicheres Urteil setzen: Die Stadt N hatte in jenem Jahre eine Belagerung auszuhalten. Nun wäre erst wieder durch Gründe hin und her zu erwägen, unter welchen Verhältnissen eine belagerte Stadt Münzen ausprägen würde oder nicht.

In der Wirklichkeit ist aber noch auf vieles andere für das endgültige Urteil Rücksicht zu nehmen. Die Münzen pflegen, da sie sehr irdischen Ursprungs sind, nicht vom Himmel zu fallen; der Fundort wird für die Bestimmung von Bedeutung sein können oder der Besitz, dem das Stück vielleicht schon längere Zeit angehört hat; die Möglichkeit einer, wenn auch noch so täuschenden Fälschung würde wiederum eine ganz andere Wendung des Urteils erfordern u. s. f.

Werfen wir indessen unserem Beispiel die Fiktion über, dafs mit den angegebenen Momenten unsere Kenntnis des Einzelfalls völlig erschöpft und eine Rücksicht auf weitere Möglichkeiten durch seine Natur ausgeschlossen wäre, so sehe ich nicht ein, dafs unser Urteil des logischen, objektiven Zwanges ermangeln sollte.

Man könnte sich die Mühe nehmen, ein Beispiel zu ersinnen, das sich dem Schema mehr näherte, in dem eine Anzahl gleich gewichtiger Gründe für, eine Anzahl gegen eine Behauptung sprechen; indessen ist seine Schärfe ein nicht erreichbares Ideal, zu dessen Konstruktion wir Elemente verwandt haben, die sich exakt nur da

vorfinden, wo die Unterscheidung nur auf absolut mefsbare, gleichartige Bestandteile seiner Materie sich zu erstrecken hat. Nicht nur der Versuch, die Vollständigkeit der Gründe, sondern auch die Gleichwertigkeit nachzuweisen würde auf endlose Schwierigkeiten stofsen. Man vergegenwärtige sich nur, dafs das formale Urteil:

$A$ ist wahrscheinlich $B$, weil die dem $B$ zukommenden Merkmale $\alpha$ zutreffen, während nur die Merkmale $\beta$ sich nicht nachweisen lassen. Natürlich müssen die $\alpha$ und $\beta$ sämtliche wesentliche Merkmale des $B$ erschöpfen. Aber was ist ein wesentliches Merkmal? Dessen Mangel den Begriff $B$ durch den von vielleicht $B_1$ zu ersetzen fordern würde. In welcher wissenschaftlichen oder praktischen Sphäre lassen sich aber die wesentlichen Merkmale der Begriffe vollständig und vor allem ohne irgend einen Zweifel angeben?

Namentlich, wo das Urteil sich nicht blofs mit sachlichen Objekten zu beschäftigen hat, wo auch Motive bei der Begriffsbestimmung mit zu berücksichtigen sind, wie bei den Feststellungen von Delikten, ist man vielfach auf solche Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen angewiesen. Man braucht nun gar nicht vom „groben Unfug“ zu reden, um auf Schwierigkeiten des Urteils zu stofsen. Diebstahl oder Raub, Totschlag oder Mord, diese Fragen bieten der Subsumierung im gegebenen Falle Hindernisse, die nur objektiv überwunden werden dürfen. Und in diesen Fällen erleichtert die Definition, welche dem Begriffe nur Merkmale zuspricht, die wir ihm selbst gegeben haben, die Untersuchung wesentlich. Sehen wir von der Mathematik und der Logik selbst ab, so ist das, was wir unter einem wesentlichen Merkmal verstehen, zwar logisch scharf und eindeutig erfafsbar, aber in Anwendung auf die Gegenstände immer so relativ wie unsere Erkenntnis überhaupt, die das Wesen der Dinge nur nach einem bestimmten Niveau des Wissens beschreibt.

In den Realdefinitionen, zumal wenn sie genetisch vorgehen, sind Urteile über einen bestimmten objektiven Sachverhalt gegeben. Aber sie sind in der Regel der Berichtigung, Verschärfung und Vervollständigung fähig. Sie sind objektiv gültig, weil sie wie alle Urteile von wissenschaftlicher Bedeutung frei gehalten werden müssen von subjektiven und psychologischen Einflüssen. Nur im logischen Schema, das dem wirklichen technischen Verhalten der Theorie und Praxis ideal überlegen ist, kann man das Definiendum gleichsam alle seine wesentlichen Eigenschaften herzählen lassen.

Schon die einfachsten Begriffe, wie rot und grün, die durch das Sieb vielfacher Abstraktion gegangen sind, enthalten so viele

Aufgaben für die Definition, dafs sie sich genötigt sieht, zu einem Oberbegriff ihre Zuflucht zu nehmen, indem sie diesen als hinreichend definiert voraussetzt. In unserem Schema „$A$ ist wahrscheinlich $B$“ liefse sich mit diesem Oberbegriff rechnen, indem man durch die allgemeinen Merkmale

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots\cdots \alpha_t$$
$$-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, \cdots\cdots\cdots - \alpha_t$$

andeutete, dafs sie alle sich zwar bei $A$ vorfinden, dafs aber aufser $B$ auch der Begriff $B_1$, und nur dieser eben dieselben Merkmale hat. Verfolgt man diesen Gedankengang weiter, so würde man auf die allgemeinere Aufgabe stofsen, zu entscheiden, dafs ein Gegenstand $A$ ein $B$, oder $B_1$ oder $B_2$ u. s. f. sei, eine Aufgabe, die sichtlich nur dann eine bestimmte ist, wenn ich von vornherein das disjunktive Urteil aussprechen kann:

$A$ ist entweder $B$ oder $B_1$ oder $B_2 \cdots\cdots$ oder $B_n$, d. h. wenn wirklich eine vollständige Disjunktion gegeben ist. Man sieht zugleich, dafs in diesen Fällen, die bei weitem die Regel bilden, die Aufgabe eine viel schwierigere wird. Nur in den seltensten Fällen wird die Disjunktion sich auf zwei Möglichkeiten beschränken, und nur der Entdecker wird zuweilen in der Lage sein, einen Gegenstand seiner eignen und einzigen Art zu bestimmen, der ein Entweder-Oder und also auch ein Wahrscheinlichkeitsurteil, das den Zweifel, also mehrere Möglichkeiten, voraussetzt, gänzlich ausschliefst. Freilich solange überhaupt ein Zweifel besteht, also immer, wenn wir ein Urteil nur als wahrscheinlich geben, werden wir es auch in disjunktiver Form aussprechen können.

Noch eine hierhergehörige bemerkenswerte Form des Urteils, in der wir zwei Fälle für gleich wahrscheinlich zu halten geneigt sind, mag kurz besprochen werden. Man könnte meinen, dafs die vollständige Disjunktion nach dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wonach dem Begriffe $A$ das Prädikat $B$ entweder zukommt oder nicht, uns häufig in die Lage versetzen könnte, zwei sich kontradiktorisch verhaltende Aussagen mit gleicher Wahrscheinlichkeit zu behaupten. In der Wirklichkeit ist das aber fast niemals der Fall. Meistens wird das „Nicht-$B$“ einen viel gröfseren Umfang, also auch eine gröfsere Wahrscheinlichkeit für sich haben, und ist das nicht zutreffend, so wird unsere Kenntnis vielfach den Ausschlag nach der einen oder andern Seite ergeben, wenn nicht ein künstliches, relativ formales, bedeutungsloses Urteil geradezu erst hergestellt wird. Wenn ich Jemanden bitte, entweder

10 Mark zu sagen oder es zu unterlassen, so ist es für mich allerdings gleich wahrscheinlich, ob er es thun wird oder nicht. Wenn ich aber Jemanden bitte, für irgend einen Zweck 10 Mark zu bezahlen, so weifs ich zwar auch nicht, ob er die Bitte erfüllen wird, aber eine absolut gleiche Wahrscheinlichkeit existiert dann nicht. Kenne ich den Gebetenen, so habe ich aus meiner Kenntnis der Person schon ein Urteil darüber, wie er sich zu dem Zweck und zu dem Geldopfer stellt. Kenne ich aber die Person gar nicht, so bin ich von vornherein eher von dem Mifserfolge überzeugt; das Zünglein der Wage spielt immer nach einer von mir leicht zu bestimmenden Seite. Um ein in neuerer Zeit häufig besprochenes Beispiel anzuführen, werfe ich die Frage auf: Ist es wahrscheinlich, dafs auf dem Sirius sich Eisen vorfindet oder nicht? Angenommen auch, man wüfste gar nichts von spektralanalytischen Untersuchungen, so glaube ich, würde man das Vorkommen von Eisen auf dem Sirius für wahrscheinlich halten, das Gegenteil für unwahrscheinlich. Seine relative Häufigkeit und der Gedanke an die Einheitlichkeit und Gesetzmäfsigkeit unserer Welt würde die negative Annahme aus dem Felde schlagen. Stelle ich aber die Frage so: Ist es wahrscheinlich, dafs auf dem Sirius ein Metall sich vorfindet, das gewisse Eigenschaften des Goldes mit gewissen Eigenschaften des Eisens verbindet, ohne dafs die Existenz eines solchen Körpers auf der Erde bisher nachgewiesen worden ist, so würde ich auch keinen Grund haben, sein Vorkommen auf dem Sirius für wahrscheinlich zu halten.

Natürlich setzt die ganze Frage voraus, dafs ich gegründeterweise ein solches Metall für möglich halte. Ich würde sonst, so gering mein Vertrauen auf das Vorkommen auch sein wird, mich in der Lage befinden, ein Urteil abzugeben, das wiederum als ein besonderer Fall des Wahrscheinlichkeitsurteils zu deuten gestattet ist. Unmöglich ist aber für den Menschen nur, was den Gesetzen seines Erkennens zuwiderläuft; in letzter Linie sind es immer wesentlich logische Momente, die ein absolut negatives Urteil begründen können. Wenn ich sicher bin, dafs in einem Gefäfse sich nur schwarze Kugeln befinden, so kann ich aus demselben keine von anderer Färbung entnehmen. Unmöglich ist dabei allerdings nicht, dafs sich die Kugeln durch irgend einen Prozefs verfärben; meine Voraussetzung will das aber ausgeschlossen wissen, und so ist mein Urteil durch mein Denken begründet, das mich zwingt, das Prädikat „schwarz“ nicht gleichzeitig mit dem Prädikat „nicht schwarz“ zu verbinden, auch durch die von der Kausalität beherrschte Wirklichkeit

nicht widerlegt werden kann, wofern dieselbe den Voraussetzungen entspricht.

Kommen wir nochmals auf das Beispiel vom Eisen zurück, so wird man leicht einsehen, daſs der Inhalt, den die Begriffe „Eisen" und „Sirius" für uns bedeuten, unser Urteil gelenkt hat. Wir würden auch gar nicht imstande sein, die Frage so zu stellen, daſs wir selbst völlig indifferent unsere Ansicht äuſserten; es sei denn, daſs wir geradezu als begründet voraussetzten: es ist ebenso gut möglich, daſs Eisen auf dem Sirius ist, als daſs es dort nicht ist — dann bleibt aber weiter nichts als die bloſse Umwandlung des Urteils, die ja nicht anders sein kann, als sie ist; d. h. ist nur eins von beiden möglich, während dieselben Gründe das Dafür und Dawider begünstigen, so ist es auch gleich wahrscheinlich.

Wir bringen eben allen Dingen ein Vorurteil entgegen, aber wie schon das gut gebildete Wort besagt, ruht es immer auf festem und nicht allein auf logischem Grunde. Wenn wir einen aus dem Zuchthaus befreiten Verbrecher in einer Situation treffen, die auf den Versuch eines neuen Verbrechens hinweisen, aber auch harmlos gedeutet werden kann, so halten wir die Schuld für wahrscheinlich und nicht den andern Fall.

Daſs Vorurteil eine Quelle des Irrtums werden kann und täglich wird, ist eine banale Thatsache, die nur dadurch zu überwinden ist, daſs wir unsere Aussagen darauf prüfen, ob sie durch die bisherigen Erfahrungen auch völlig unterstützt werden oder nicht. Eben wo die Möglichkeit eines sicheren Urteils ausgeschlossen ist, sind wir auf Vermutungen angewiesen, die von einem bekannten Sachverhalt auf den unbekannten schlieſsen. Daſs wir dabei von der durch teilweise Übereinstimmung in wesentlichen Punkten gegebenen Analogie geleitet werden, ist eine Thatsache unseres Verstandes, die, wie mir scheinen will, von den psychologischen, subjektiven Beeinflussungen unseres Urteils scharf zu trennen ist. Diesem letzteren liegt immer die allgemeine Voraussetzung unseres Verstandes zugrunde, daſs Ordnung und Gesetzmäſsigkeit in den Dingen und Erscheinungen wirklich herrscht. Es giebt keine Zufälligkeiten, und dieser Begriff hat meistens nur die negative Bedeutung, durch die wir nicht die Kausalität, sondern nur unsere Kenntnis des Zusammenhangs leugnen, wofern es uns nicht gelingt, den Zufall durch positive Bestimmung seines kontradiktorischen Gegensatzes zu definieren; wie wenn wir von einer Begegnung sagen, daſs sie nicht absichtlich herbeigeführt, sondern daſs sie

zufällig sei. Wir sind gezwungen, allen Dingen eine Natur, d. h. ein gesetzmäfsiges Verhalten, zuzutrauen, und wenn wir den aus dem Zuchthaus Entlassenen in jenem Beispiel verdächtigen, so trägt sein früheres, doch wohl aus seiner objektiv erkennbaren Eigenart hervorgegangenes Verhalten daran die Schuld.

Jedes Urteil, sei es mit Gewifsheit oder nur mit Wahrscheinlichkeit gefällt, hat unser gesamtes Erkenntnisvermögen zur Voraussetzung. Dafs der grofse Haufe der Menschen sich dessen nicht bewufst ist, kann daran nichts ändern. Wenn der Wilde die Abwechslung von Tag und Nacht mit Sicherheit erwartet, so kennt er gewifs nicht die Gesetze, welche den Wechsel hervorbringen. Aber dafs er mit Notwendigkeit vor sich geht, wird auch er nicht bezweifeln, wenn er darüber nachzudenken veranlafst wird. Bekannt ist die Beunruhigung, die sich des Naturmenschen beim Erleben einer Sonnenfinsternis bemächtigt; worin sollte sie begründet sein, als in der Befürchtung, dafs ihm unbekannte und, wie er anzunehmen geneigt ist, die Sicherheit seiner Existenz gefährdende, gewaltige Ursachen den gewöhnlichen Verlauf zu stören geeignet sind? Die mangelnde Kenntnis erweckt falsche Vorstellungen, aber der Gedankenprozefs ist ohne die allgemein herrschenden Verstandesgesetze nicht möglich.

Nach dem Bisherigen möchte so viel über das Wahrscheinlichkeitsurteil, das in objektiver Weise zustande kommt, feststehen: Es erfordert völlig objektiv gültige Grundlagen; sind diese gegeben, so kann der Verstand nur in eindeutiger Weise eine Aussage machen. Nur die beiden Pole, volle Assertion und Unmöglichkeit, sind im Urteil exakt vertreten; nur dafs etwas so und nicht anders sei, oder dafs etwas überhaupt nicht sein könne, kann ich scharf aussagen, weil ich durch die Gesetze des Erkennens eingeschränkt bin; es giebt eben nur ein formales Kriterium der Wahrheit. Dafs mein Freund X jetzt hier in meinem Zimmer sich befindet, ist mir nur deshalb gewifs, weil ich nicht denken kann, dafs er zugleich hier und zugleich nicht hier sein könne; sein Hiersein wird mir als objektiv nur dadurch garantiert, dafs jeder andere Verstand auf Grund derselben Voraussetzungen mein Urteil wiederholen müfste. Wenn Jemand sagte: nicht X, sondern Y ist in deinem Zimmer, so ist es wohl möglich, dafs seine Kenntnis ihn zu dieser Aussage zwingt, aber der Irrtum liegt nicht in seinem Denken, sondern in einer falschen Beziehung des Denkens auf den Inhalt.

Sofern ich von einem Subjekt ein Prädikat als wahrscheinlich

aussage, kann ich durch die Begründung andere veranlassen, sich der Aussage anzuschliefsen; einen bestimmten Grad der Wahrscheinlichkeit anzugeben, ist man aber nicht in der Lage, wofern nicht ein lediglich auf formalen, mathematischen Gründen ruhendes Urteil gebildet wird. Eben die völlige Übereinstimmung unserer Gründe für und wider eine Aussage können wir nicht anders als formal behaupten. Nur wenn wir weiter nichts wissen, als dafs ein $A$ entweder ein $B_1$ oder ein $B_2$ ist, und dafs kein denkbares Moment eher für $B_1$ als $B_2$ und umgekehrt spricht, könnten wir scharf von gleicher Wahrscheinlichkeit reden. In dem Falle, in welchem die $A$, $B_1$ und $B_2$ aber irgendwelche empirische Gegenstände bedeuten, liegt in dem, was wir thatsächlich von ihnen wissen, eine Störung der absoluten Indifferenz unseres Urteils, wie auch schon die blofse Annahme ungleicher realer Umfangsverhältnisse unsere objektive Prädizierung gleicher Wahrscheinlichkeit verhindern mufs. Wenn ich erfahre, dafs in der Familie meines Freundes ein Kind geboren ist, so sollte man meinen, dafs ich mit absoluter Schärfe sagen könnte, es ist gleich wahrscheinlich, dafs es ein Mädchen oder ein Knabe ist.

Niemand wird ein praktisches Interesse daran haben, eine solche Frage exakt zu beantworten, aber für das Wesen des Begriffs und seines Gebrauchs ist es doch wichtig, sich klar zu machen, dafs in der Behauptung gleicher Wahrscheinlichkeit die Voraussetzung liegt, dafs nicht allein immer gleich viel Knaben und Mädchen geboren werden, sondern dafs auch im Moment der Geburt diese Gleichheit nicht aufgehoben wird. Ein Zweifel über diese numerische Gleichheit mufs auch die Indifferenz meines Urteils stören.

Ist die Disjunktion so beschaffen, dafs ich von einem $A$ aussage, es sei entweder ein $B$ oder ein Nicht-$B$, so werden, wie schon angedeutet, die Beurteilungen im allgemeinen nicht auf eine gleiche Wahrscheinlichkeit geführt werden. Ist das $A$ etwas völlig Unbestimmtes, so ist es für jeden Verstand höchst unwahrscheinlich, dafs es sich eben unter den Begriff $B$ bringen lasse, sofern nicht dieser so allgemein ist, dafs die Frage sinnlos wird. Jedes „Etwas“ mufs wenigstens ein Gegenstand unserer Gedanken sein können, und jedermann wird ohne einen besonderen Grund zu anderer Annahme von einem Dritten als sehr unwahrscheinlich aussagen, dafs gerade jetzt der Mond oder die Freiheit oder sonst

ein bestimmtes Objekt seine Gedanken beschäftigt, und doch mufs jener entweder an den Mond denken oder nicht.

Der Begriff wahrscheinlich hat als „Stammbegriff" den der Möglichkeit; sein Gebrauch im Urteil bedeutet wesentlich eine Funktion unseres Verstandes. Kant hatte das problematische, assertorische und apodiktische Urteil, die drei Funktionen der Modalität, als so viele Momente des Denkens bezeichnet (Kritik d. r. V. Kirchmann S. 118). Giebt man dies Bild zu, so ist das Wahrscheinlichkeitsurteil als eine Zwischenstation anzusehen, die vom problematischen Urteil zum einen oder andern der beiden letzten Arten führen kann. Wie bei allen dreien trägt auch seine Besonderheit zum Inhalt des Urteils nichts bei; es bestimmt nur „den Wert der Copula in Beziehung auf das Denken überhaupt".

Psychologische Reaktionen im engeren Sinne haben hier nicht mitzuwirken, so dafs man gut thut, mit den logischen Grundlagen nicht die von denselben ausgelöste Gesamterscheinung im Bewufstsein ohne Not zu verquicken. Unser Vertrauen und unsere Überzeugung werden sich in der Regel von dem leiten lassen, was der Verstand für wahrscheinlich zu halten empfiehlt, aber die Regel bedingt die Ausnahme. Unsere Strebungen sind nicht immer gezügelt, und zumal der Spieler, den die feine mathematische Disziplin theoretisiert, bringt ihr im günstigsten Falle nur platonische Neigungen entgegen. Wenn ein bekannter Parlamentarier bei einer Lotteriedebatte meinte, es sei ebenso wahrscheinlich, dafs man auf der Strafse angeredet werde: „Sie gefallen mir, ich will Ihnen ein Vermögen schenken", als dafs man das grofse Los gewinne, so hatte er nicht so ganz unrecht. Die Sympathiekundgebung ist möglich, dafs e i n Spieler das grofse Los gewinnt, ist notwendig; die klar erkannte geringe Chance des Einzelnen hält aber Tausende nicht vom Spiele zurück. Das Vertrauen läfst sich nicht messen; vielleicht, dafs es sich graduieren liefse, aber dann auch nicht a priori, sondern a posteriori und nicht das eigene, dessen Intensität man empfindet, sondern das anderer Individuen. Wenn der Börsianer à la hausse spekuliert, so werden wir wohl ein Urteil nach der Höhe seines „Engagements" darüber abgeben können, welches Vertrauen er seinem Spielobjekt entgegenbringt. Aber dem Haussier steht ja ein anderer gegenüber, der à la baisse dieselbe Hoffnung nährt zu gewinnen, ohne dafs der eine viel mehr wüfste, als der andere. Sprechen wir von dem Mafse unseres „vernünftigen Zutrauens", so ist das entweder eine Umschreibung des Begriffes

Wahrscheinlichkeit, oder es besagt gar nichts objektiv Richtiges, wie jenes Börsenbeispiel beweist. Unser Erwarten — Hoffnung und Furcht, Vertrauen und Mifstrauen, das wir in eine Sache setzen — ist eben eine sehr komplizierte Erscheinung unseres Bewufstseins, während in allen Fragen des Erkennens unserem Verstande allein das Wort zukommt. So gewifs in allen Äufserungen und Bestimmungen der Erwartung Verstandeselemente vorkommen, so geboten ist es, sie in der Untersuchung zu isolieren. Ein Mafs für die Erwartung kann es nicht geben, so wenig als für unsere Zuneigung oder unsern Hafs. Wir können sie nicht anders beurteilen, als indem wir sie auf Grund ihrer Bethätigungen vergleichen. Aber auch unsere Rückschlüsse auf das Verstandesurteil sind trügerisch. Wer seine ganze Habe auf irgend ein kühnes Unternehmen setzt, mufs nicht notwendig den Erfolg als wahrscheinlich beurteilt haben. Va banque spielt der vom Verstande Verlassene, sei es im Rausche der Hoffnung oder im Banne der Verzweiflung.

Um unser Vertrauen zu anderen Menschen möglichst bestimmt auszusprechen, sagen wir wohl, was wir mit Ruhe ihnen in Obhut geben möchten. Von einem Bankier hörten wir: „Ich würde meinem Diener ungezähltes Gold in die Hände geben." Die funktionellen Beziehungen psychischer Zustände, also sehr komplexer Erscheinungen lassen sich nicht analytisch darstellen, und wo es scheinbar der Fall ist, müssen schon die Gröfsenbeziehungen in einer prävalierenden Richtung definiert sein, wie das z. B. bei Geldleuten zutrifft.

Im Laufe der Betrachtungen ist es vermieden worden, soweit es anging, kausale Beziehungen in den Vordergrund zu stellen. Alle unsere Urteile beruhen auf unserer Kenntnis von den Objekten, und der allgemeinste Inhalt jeder Erkenntnislehre ist eine Beantwortung der Frage, wie man zu Objekten kommen und von ihnen etwas aussagen könne. Die Begründung ist somit eine ganz allgemeine, ob wir auf einen früheren, einen jetzt vorhandenen Thatbestand oder ein Geschehen, das in der Zukunft liegt, unser Augenmerk richten. Jedes Urteil setzt, wie mehrfach angedeutet, das g e s a m t e Erkenntnisvermögen voraus, und wo wir von einzelnen Funktionen abstrahieren, sind doch eben diese Abstraktionen nur möglich, weil es u n s e r Verstand ist, der sie vollzieht. Wie ein reiner oder, man könnte auch sagen, partieller Verstand und ob er überhaupt urteilen würde, das auszudenken, enthält unvollzieh-

bare Voraussetzungen. Im Begriffe des Wahrscheinlichen liegt schlechthin, dafs es irgendwie begründet sein müsse, und ob ein Thatbestand oder eine Verhaltungsweise die Unterlage bildet, ist logisch völlig gleichgültig. Wenn wir vom Zukünftigen reden, setzen wir notwendig ein, wie auch geartetes Geschehen voraus, ohne das überhaupt der Begriff eines zeitlichen Ablaufs gar nicht zu denken ist. Dafs wir nur über Vergangenes und Gegenwärtiges ein Urteil mit voller Assertion aussprechen können und streng genommen nur des unmittelbar Erlebten völlig sicher sind, wird die Domäne der Wahrscheinlichkeit wesentlich in eine Region verlegen, die uns räumlich und zeitlich mehr oder minder fern liegt. Für die logische Beurteilung ist das ebenso belanglos wie formell die besondere Art der Aussage, ob sie z. B. kategorisch, hypothetisch oder disjunktiv einen Unterschied bedingt. Selbst die feste Thatsache können wir in ein Wahrscheinlichkeitsurteil verflechten, indem wir sie nach unserer apriorischen, ihr vorhergehenden Beurteilung messen. Die historische Kritik ist häufig gegenüber sicheren Überlieferungen in der Lage, sie auf die Wahrscheinlichkeit zu prüfen, wenn ihre Möglichkeit zweifellos, aber die verschiedene Auffassung entweder einen Zufall oder eine höhere Fügung walten sieht.

Dafs Zukünftiges meistens nur wahrscheinlich ist, dafs ferner all unser Handeln sich nur auf Zukünftiges bezieht, ist geeignet, dem Begriff einen Beigeschmack zu geben, der sich in der Charakteristik „von praktischer Bedeutung“ geltend macht. In der That giebt das Wahrscheinliche Direktiven für eine Entscheidung, die in erster Linie die Aneignung einer bestimmten Ansicht bedeutet. Setzt sich dieselbe in eine Handlung um, so werden wir durch den Erfolg so wenig über die Richtigkeit unseres Wahrscheinlichkeitsurteils belehrt, als derselbe in der Logik überhaupt in Frage kommt. Jedes Urteil kann nur an seinen Voraussetzungen und der richtigen Verknüpfung der gegebenen Denkinhalte gemessen werden. Jede Beurteilung der Entscheidung, die sich für ein zweifelhaftes Urteil ausspricht, trifft nur mittelbar die Wahrscheinlichkeitsaussage; sie hat sich wesentlich an die Prüfung der Voraussetzungen zu halten. Streng genommen ist jedes Wahrscheinlichkeitsurteil nur von „technisch-praktischer“ Bedeutung; es selbst kann sich zwar Anerkennung erzwingen, aber es ist, sofern es einen Wissensinhalt in eine bestimmte Form bringt, nur ein Mittel, das unserer Bemühung nach sicherem Wissen immer vorhergeht. Lichtenberg sagt von der Hypothesenkenntnis, dafs sie „eigentlich

so wenig in die Physik als die Mühle und der Backofen in den Speisesaal" gehöre. Das ist nicht völlig zutreffend, weil eine scharfe Trennung des Sichergewufsten und des Hypothetischen sich nur auf Gradunterschiede angewiesen sieht. Indessen trifft der drastische Vergleich in vielen Fällen auf die Anwendung der allgemeinen Methodik unseres Verstandes zu, mit der wir Wahrscheinlichkeiten messen. So wird man sich auch hüten müssen, das Wahrscheinlichkeitsurteil als Grundlage einer Theorie zu bezeichnen. Das berühmte Beispiel von Kirchhoff begründet die Spektralanalyse nicht; es würde die Überzeugung viel eher einschränken, wenn nicht die Wucht der sicheren Überlegungen jede Zweideutigkeit der bekannten Erscheinungen ausschlösse.

In unseren Betrachtungen ist das Wahrscheinlichkeitsurteil selbst das Objekt, über das wir uns äufsern wollen. Daher dürfen wir von ihm verlangen, dafs die Verknüpfung der Begriffe so vollzogen sei, dafs wir für dieselbe Anerkennung vom Verstande der Menschen müssen erzwingen können, einen so engen oder so weiten Spielraum wir ihnen auch für eine Entscheidung, die Bildung einer Ansicht oder die Initiative einer Handlung, einräumen werden. Die Elemente des Urteils, wenn sie nicht, wie überall in der Theorie, lediglich vorausgesetzt sind, giebt uns eine Analyse unserer sinnlichen Wahrnehmung und die Umschau in unserem Verstande. Es ist die Natur dieser beiden ursprünglichen Faktoren, dafs weder die Sinne noch der Verstand von ihren eigenen Gesetzen abweichen[1]), so dafs nur „der unbemerkte Einflufs der Sinnlichkeit auf den Verstand" bewirkt, dafs die subjektiven Gründe des Urteils mit den objektiven zusammenfliefsen und diese von ihrer Bestimmung abweichend machen.

Kant warnt, die Wahrscheinlichkeit mit dem Scheine zu verwechseln, „denn diese ist Wahrheit, aber durch unzureichende Gründe erkannt, deren Erkenntnis zwar mangelhaft, aber darum doch nicht trüglich ist". In der That reichen die wahren Bestimmungen des Urteils nicht hin, die wesentlich problematische Form desselben gegen eine andere zu vertauschen, aber in der Art, wie es gefällt wird, ist es ebenso wahr als das mit Sicherheit ausgesprochene. Wahrscheinlichkeit und Gewifsheit liegen ja nicht in den Dingen, denn diese, wenn auch schon durch den Verstand begrifflich fixiert, haben mit der spontanen, eigengesetzlichen Verknüpfung im Ver-

---

[1]) Kritik d. r. Vernunft. Kirchmannsche Ausg. S. 291.

stande nichts zu thun. Wenn über das allgemeine Kennzeichen der Wahrheit nicht oder nur gestritten werden kann, so ist doch hinreichend klar, was man unter Objektivität und Wahrheit eines Urteils zu verstehen hat, deren ideale Ansprüche selten erfüllt werden können, deren Möglichkeit zu leugnen auf das Wissen ebenso sehr Verzicht zu leisten bedeutet, als wenn man sie nur als möglich oder wahrscheinlich bezeichnen wollte. Unsere gesamte Erfahrung, von der wir im Einzelnen denken können, dafs auch eine andere Konstitution möglich wäre, und ein anderes Gesamtbild wirklich werden könnte, ruht auf jener Allgemeinheit und Wahrheit unserer Gedanken, welchen die Wirklichkeit entsprechen mufs, wofern wir nicht auf der Basis logischer Möglichkeiten die reale Möglichkeit des Unsinns, Wirrwarrs oder des Zufalls zugeben wollen. Ein Mifsverstand, der einem immanenten Zirkel zu verdanken wäre, weil die Begriffe der logischen und realen Möglichkeit — die letztere erfordert aufser der Denkbarkeit auch die Widerspruchslosigkeit gegenüber den Gesetzen der Erfahrung — wiederum ein Wissen von Etwas, eine auf der Übereinstimmung unserer Gedanken mit der Wirklichkeit beruhende Kenntnis voraussetzen würde. Wer die Bedingungen der Erkenntnis leugnet, die Allgemeinheit und Notwendigkeit nicht blofs unseren Denk- und Anschauungsformen sichert, sondern auch unserer Erfahrung die feste, eindeutige aprioristische Basis gewährleistet, der mufs konsequenterweise die Erkenntnis überhaupt leugnen. Dieser Nihilismus ist naiv, weil er den Anspruch erheben mufs, andere zu überzeugen, während er doch nicht einmal die Fähigkeit hat, andere zu täuschen. Giebt es keine Wahrheit, so giebt es auch keinen Irrtum. Was lehrt er, Wahrheit oder Irrtum? Das ist völlig ununterscheidbar. Die Philosophie hat den absoluten Skeptizismus mit Leichtigkeit überwunden; der gesunde Menschenverstand mufs auch in der allgemeinsten Disziplin seine Rechnung finden.

Möglich, wirklich, notwendig, diese Kategorien der Modalität, welchen jene drei Arten der Urteile entsprechen, sind im Erkenntnisgebrauche eine wie die andere durch den Gegenstand zu bestimmen. Von den beiden letzten sieht man das ohne weiteres ein, obwohl Wirklichkeit und scheinbare Notwendigkeit eines Begriffes häufig schon mit seiner blofsen Möglichkeit im Denken als eine Erkenntnis ausgesagt werden. Eben diesen logischen Schein auf seinen Unwert zurückzuführen, ist die erste Aufgabe der Kritik. Auf dem Wege von dem Möglichen, das als wahr im Sinne unserer Denk- und

Anschauungsformen erkannt sein mufs, führt uns das Wahrscheinliche nach unserer Absicht zur sicheren Erkenntnis. Zu dem lediglich problematischen Urteile müssen assertorische und apodiktische hinzukommen, damit man eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen könne. Dafs im Beispiele (S. 19) jene Münze dem Orte M entstammt, ist möglich. M hat in einem bestimmten Jahre Münzen der vorliegenden Prägung geschlagen; das ist wirklich. Dafs auf Grund unserer Voraussetzungen M oder N der Ursprung sein müsse, ist notwendig. Es genügt nicht die Möglichkeit allein, eine Wahrscheinlichkeitsaussage zu machen — darüber wird man nicht im Zweifel sein können.

Wenn KANT von den Kategorien der Modalität aussagt, dafs „sie den Begriff, dem sie als Prädikate beigefügt werden, als Bestimmung des Objekts nicht im mindesten vermehren, sondern nur das Verhältnis zum Erkenntnisvermögen ausdrücken", so wird dasselbe vom Wahrscheinlichen gelten, zu dessen Behauptung notwendig die Möglichkeit und Gründe gehören, die dem Urteil über seine Wirklichkeit eine bestimmte Richtung zu gehen vermögen.

Jede Wahrscheinlichkeitsaussage enthält, abgesehen von ihrer Einschränkung, ein Urteil, das vollständig begründet sein müfste, wenn ihm eine andere Modalität zukommen sollte. Allgemeine Vorschriften darüber, wann es als völlig begründet anzusehen sei, wann nicht, lassen sich nicht geben. Die problematischen Urteile pflegen einem Bedürfnis zu entsprechen, wo sie in der Wissenschaft auftreten; so wenig begründet sie unter Umständen zu sein pflegen, so ist es aufser dem Bedürfnis nach Erklärung immer wenigstens ein Gleichnis, eine Analogie, die ihre vorläufige Setzung rechtfertigt. Sind wir dann in der Lage, die Gründe anzugeben, welche die Setzung veranlafst haben, so fehlen uns nicht allein die Gründe, welche die Assertion verlangt, sondern wir sind auch vielfach aufser stande, nur anzugeben, welche Gründe wir nötig haben würden, damit die Wahrscheinlichkeit, so gering oder so grofs sie sein mag, in die Gewifsheit übergehe. Erklären bedeutet nichts weiter, als ein Schema für die Erscheinung, einen Vorgang, eine Thatsache zu liefern, das uns schon verständlich oder geradezu so geläufig ist, dafs wir nicht weiter fragen. In der Physik ist es die Aufgabe, alles auf Bewegungen zurückzuführen, welche die Mechanik uns zuvor beschrieben hat. Ihre letzten Instanzen sind Gleichnisse, wie das eine Wort „Kraft" uns lehren kann.

Der Darwinismus setzt für die paläontologischen oder historischen Reihen der Organismen eine ähnliche Aufeinanderfolge wie

die der Entwickelungsphasen des Individuums, und er ist sich voll bewufst, dafs hier ungeheuere Lücken durch die Beobachtung auszufüllen sind, um die Merkmale der Analogie zu vervollständigen.

Von der Fiktion bis zur wohlbegründeten Hypothese, vom lockeren Gleichnis bis zur Theorie herrscht die Wahrscheinlichkeitsaussage, die sich auf das zu stützen hat, was an positiven Gründen nach dem Stande unserer Kenntnis geltend gemacht werden kann. Lotze sagt (Logik S. 408) von der Naturwissenschaft, dafs es hier öfter so zugeht, „wie bei der festen Ausmauerung der Brunnen: man baut von oben hinunter und verläfst sich darauf, dafs die angenommenen Thatsachen nach unten einstweilen von dem unanalysierten Grund und Boden haltbar genug unterstützt werden, um die aufgesetzte Mauer zu tragen, bis man einen Schritt tiefer ihnen wieder eine Schicht von Fundament unterziehen kann, der es dann wieder so geht". Leider ist es mit dem Brunnen allein nicht gethan; man will auch Wasser zu Tage fördern; auch den noch so vollständig fundierten Hypothesen ist das Schicksal nicht erspart geblieben, dafs man ihren Boden verlassen und an anderer Stelle graben mufste.

Das mufs sich das Wahrscheinliche immer gefallen lassen, von der Wirklichkeit überwunden zu werden, aber ob seine Gründe zutreffend und richtig waren, ist eine andere Frage, und zwar die einzige, welche eine Untersuchung über die Wahrscheinlichkeit zu prüfen und zu beantworten hat. Es handelt sich hier lediglich um die Berichtigung von Denkfehlern, wie sie z. B. der Hypothese vom „horror vacui" zugrunde lagen [1]).

---

[1]) Vielleicht ist es gestattet, hier eines feinen Unterschieds zu gedenken, der von Lichtenberg über das Schicksal von Hypothesen im Affekt gemacht wurde. L. hatte in einem Schreiben an den Hauptmann Werner in Giefsen die Undulationstheorie der „Zitterer" heftig bekämpft (Werke Bd. IX); den zurückerbetenen Brief hat er mit einem Umschlag und einer Aufschrift versehen, die als „zu schön" von den Herausgebern mitveröffentlicht worden ist. In dieser Aufschrift heifst es: Er (Werner) schrieb mir blofs Wiederholungen seiner alten Behauptungen, nur mit gröfserem Triumph. Er hatte dabei den elenden Einfall, das Grab der Newtonschen Theorie vom Licht zu zeichnen, mit Grabstein und Inschrift. Ein solcher Philosoph verdiente keine schriftliche Antwort mehr; ich liefs ihm aber durch einen Freund sagen: Es wäre mir wenigstens angenehm, die Theorie, zu der ich mich bekennte, ehrlich auf dem Kirchhofe zu sehen; da aber die seinige noch, wie er sage, am Leben wäre, so könne man nicht wissen, ob sie nicht noch einmal gehenkt würde". Lichtenberg hat nicht recht behalten; die Korpuskulartheorie allerdings ist ehrlich begraben, und die andere wird schwerlich

Jene drei Kategorien der Modalität haben KANT zu ebensoviel „Postulaten des empirischen Denkens" den Anlafs gegeben. In den Grundsätzen des reinen Verstandes nehmen dieselben mit den „Analogien der Erfahrung" eine Stellung ein, welche ihnen einen blofs „regulativen" Gebrauch zuweist, im Gegensatz zu den konstitutiven „Axiomen der Anschauung" und den „Anticipationen der Wahrnehmung".

KANT nennt auch jene drei Grundsätze nur subjektiv-synthetisch, was er dahin erläutert, dafs sie „zu dem Begriffe eines Dinges (Realen), von dem sie sonst nichts sagen, die Erkenntniskraft hinzufügen, worin er entspringt und seinen Sitz hat, so dafs, wenn er blofs im Verstande mit den formalen Bedingungen der Erfahrung in Verknüpfung ist, sein Gegenstand möglich heifst; ist er mit der Wahrnehmung (Empfindung als Materie der Sinne) im Zusammenhang und durch dieselbe vermittelst des Verstandes bestimmt, so ist das Objekt wirklich; ist er durch den Zusammenhang der Wahrnehmungen nach Begriffen bestimmt, so heifst der Gegenstand notwendig" (S. 243). Wenn er ihnen gleichwohl den Charakter einer Notwendigkeit a priori beilegt (S. 184), und behauptet, dafs sie sich nicht in der Gewifsheit, welche auch bei ihnen a priori feststeht, sondern in der Art der Evidenz, d. i. dem Intuitiven der konstitutiven Grundsätze von letzteren unterscheiden, so werden wir nicht mifsverstanden werden, wenn wir dennoch von ihrer objektiven Gültigkeit im Gegensatz zu blofs logischer oder subjektiver (individueller) Bedeutung reden.

Das Wahrscheinliche verlangt als Minimum objektive Möglichkeit, die, wie wir uns auch wenden mögen, auf den apriorischen Gesetzen der Erfahrung nicht allein, sondern auch auf den Gesetzen, die wir empirisch und also jenen gemäfs im Laufe der Zeiten gewonnen haben, beruhen wird. Die Erscheinungen des Spiritismus sind logisch möglich. Objektiv möglich aber ist es nicht, dafs bei zwei fest aufeinander geprefsten Schiefertafeln eine Schrift auf der Innenseite erscheint, wenn nicht die Tafeln präpariert waren, oder irgend ein Taschenspielerstück sie an jener Stelle hervorgerufen hat. Wäre aber die geheimnisvolle Schrift als etwas, das zuverlässig weder von der Beschaffenheit der Tafeln noch von einer nachweisbaren menschlichen Hand herrühren kann, festgestellt,

---

gehenkt werden, aber ein Unterschied kann für alles Wahrscheinliche gelten. Es kann durch die Wirklichkeit rite überwunden oder auch an sich als falsch erfunden werden.

so wäre eine Thatsache konstatiert, die Erklärung forderte. Der Begriff des objektiv Möglichen hätte eine Erweiterung erfahren, der „Spiritismus“ nach seinen bisherigen „objektiven“ Merkmalen wäre eine Thatsache, wie sie das Gewitter war, ehe man seine elektrische Natur auch nur ahnen konnte. Trotzdem wären tausend schwerwiegende Gründe gegen den Aberglauben anzuführen, dafs wir eine Manifestation ruheloser Seelen Abgeschiedener anerkennen müfsten. Aber in das Gebiet des Wahrscheinlichen wäre das, was man mangels besserer Erklärung Spiritismus benennt, eingerückt.

Das, was über die blofse objektive Möglichkeit hinaus für die Geltung des Urteils gesagt werden kann, und was dagegen spricht, darf sich nicht wieder auf Möglichkeiten beschränken. Die Gründe müssen allen Anforderungen entsprechen, die wir an ein sicheres Wissen stellen. Namentlich vor negativen Argumenten wird man sich zu hüten haben. Sie ruhen entweder selbst auf dem, was wir wissen, wie das objektiv Unmögliche auf den Gesetzen, denen es zuwiderläuft, und haben dann „Gewicht“, oder sie sind lediglich logische Gebilde von keinerlei Bedeutung.

Die Gründe im Wahrscheinlichkeitsurteil müssen, wie Kant sich im Gleichnis ausdrückt, „ponderiert“ werden; das setzt schon voraus, dafs sie auch „Gewicht“ haben. Negative Gründe, sofern sie nur aussagen, was wir nicht wissen, haben kein „Gewicht“; sie lassen sich nicht werten und nicht vergleichen. Jenes Abwägen ist die eigentliche Verstandeshandlung, es unterliegt nur den Verstandesgesetzen, aber es ist im allgemeinen in exakter Weise nicht möglich. Die Gründe sind in der Regel sehr ungleichartig, und wir haben kein gemeinsames Mafs, das gleichartig machen könnte, was nach seiner Erkenntnisart nicht in mathematisch konstruierbaren Gröfsenbeziehungen seinen adäquaten Schematismus findet. Ganz davon abgesehen, dafs auch das Werkzeug unserer Gedanken, die Sprache, versagt, wenn sie absolut Eindeutiges vermitteln soll, vermögen wir Wahrscheinlichkeiten im allgemeinen nicht einmal zahlenmäfsig zu schätzen. Wir begnügen uns im gewöhnlichen Gebrauch mit den Prädikaten „wahrscheinlich“ und „unwahrscheinlich“, vergleichen mehrere Urteile mit einander, wie es bei jeder anderen Komparation von Eigenschaftsbegriffen auch geschieht; aber dafs wir imstande wären, einen Grad mit dem Anspruch auf eine gewisse Annäherung zu bezeichnen, wie wir etwa nach dem Augenmafs den Teil einer Länge nach Zehnteln anzugeben fähig sind, davon ist hier nicht die Rede. Es bleibt hier in der Verständigung der Menschen ein

Spielraum, der bei aller Objektivität der Grundlagen nicht zu beseitigen ist.

Nach KANT wird von jedem Urteil verlangt:

1) dafs es sich nicht logisch widerspreche;

2) dafs es a) Gründe habe und b) nicht zu falschen Folgerungen führe.

Mit diesem Prüfstein werden wir auch in den folgenden Untersuchungen der „mathematischen Wahrscheinlichkeit" zu operieren haben.

Es ist indes von Wichtigkeit, das Moment b) besonders zu erörtern. Ein Wahrscheinlichkeitsurteil kann durchaus richtig sein, und dennoch mufs es mit Notwendigkeit aufgehoben werden, wenn wir in den Besitz sicherer Erkenntnis gelangen. Aber eben dies sagen wir ja schon aus, wenn wir einer Behauptung die Beschränkung hinzufügen, dafs sie blofs als wahrscheinlich gelten solle. Statistische Untersuchungen haben gezeigt, dafs die Sterbeverhältnisse Verheirateter günstiger sind, als bei ledigen und verwitweten Personen. Das giebt uns scheinbar ein Recht, von der Wahrscheinlichkeit zu reden, dafs die Ehe das Leben der Menschen verlängere. Aber das Urteil ist unrichtig, weil es nicht hinreichend begründet ist. Denn alle die Gründe, welche ein Eingehen der Ehe widerraten oder unmöglich machen, können sehr wohl geeignet sein, eine ungünstigere Sterblichkeit herbeizuführen. Wir können also nach den Erfahrungen nur als wahrscheinlich aussagen, dafs im Durchschnitt das Leben verheirateter Personen ein längeres ist, als das lediger. Wenn nun an eine Gesellschaft verheirateter Personen der durch frühere Erfahrungen gegebene Mafsstab angelegt wird, gleichwohl aber ihr Absterben rascher vor sich geht, als bei ledigen, so war unser Urteil nicht falsch, weil es zu unrichtigen Folgen geführt hätte. Denn das ist gar nicht der Fall. Wenn aus einer Urne mit überwiegend weifsen Kugeln eine von anderer Farbe gezogen wird, so bleibt das vorher ausgesprochene Urteil der höheren Wahrscheinlichkeit einer weifsen Kugel durchaus richtig. So einfach das erscheint, so wenig überflüssig ist es, ausdrücklich darauf hinzuweisen. Man hat aus einer mit Recht ausgesprochenen hohen Wahrscheinlichkeit die Sicherheit des Urteils gefolgert, während eben diese Beschränkung ein Ventil abgiebt, den Irrtum von unserem Erkennen auszuscheiden. Was sehr wahrscheinlich ist, ist eben darum nicht gewifs, geschweige denn notwendig, und das noch so Unwahrscheinliche bleibt immerhin noch

möglich. Streng genommen kann also das richtig gebildete Wahrscheinlichkeitsurteil nie zu unannehmbaren Folgen führen; nur legt diese Unwiderlegbarkeit die Pflicht auf, die Aussage noch vorsichtiger als in jedem andern Falle zu prüfen.

Alle diese weitläufigen Betrachtungen haben wir vorangeschickt, weil der Gegenstand der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre nicht abgesondert von den allgemeinen Verfahrungsweisen des Verstandes erkannt werden kann. Aus diesen mufs sie sich ableiten lassen, wie das Besondere aus dem Allgemeinen überhaupt.

Nach Kant bedarf es „keiner Kritik der Vernunft im empirischen Gebrauche, weil ihre Grundsätze am Probierstein der Erfahrung einer kontinuierlichen Prüfung unterworfen werden"; desgleichen „auch nicht in der Mathematik, wo ihre Begriffe an der reinen Anschauung sofort in concreto dargestellt werden müssen, und jedes Ungegründete und Willkürliche dadurch alsbald offenbar wird".

Nur für den „transscendentalen Gebrauch nach blofsen Begriffen erscheint ihm die Disziplin, wodurch der beständige Hang, von gewissen Regeln abzuweichen, eingeschränkt und endlich vertilgt wird", nötig.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann weder der Probierstein der Erfahrung noch die automatische Kontrole der Mathematik den Irrtum verhüten, weil sie sich weder mit Erfahrungs- noch mit blofs mathematischen Urteilen befafst. Hier haben also alle Gesetze des Verstandesgebrauchs den Verstand selbst zu disziplinieren.

---

# Die mathematische Wahrscheinlichkeit.

Es mutet seltsam an, wenn man zuweilen Berufungen auf die mathematische Wahrscheinlichkeit hört, wo der gemeine Verstand völlig für das Urteil ausreicht. Aber die Mathematik steht in einem so guten Ansehen, dafs ihre Billigung als eine besondere Gewähr der Richtigkeit angesehen wird, wo sie gar nicht vonnöten wäre. Und auch da, wo der „mathematische Erfindungsgeist zur blofsen Übung des Scharfsinns“ Aufgaben von „anscheinender Anwendung“ [1]) stellt, ist man geneigt, von der Mathematik etwas zu verlangen, was sie in der That nicht geben kann: Prinzipien für die Beurteilung des Wahrscheinlichen. Der Sinn der berühmten Worte von LAPLACE: „Die Theorie der Wahrscheinlichkeiten ist im Grunde nichts anderes, als der in Rechnung gebrachte Menschenverstand“ ist völlig zutreffend. Der Begriff des Wahrscheinlichen, könnte man unter Veränderung eines Wortes von STUMPF [2]) sagen, ist der Mathematik so fremd wie der von gut und böse.

Die Mathematik hat es einzig und allein mit Gröfsenbeziehungen zu thun; wo sie Prinzipien giebt, entspringen diese aus ihren Operationen und sind von ganz allgemeiner Geltung. Die Anwendung der Mathematik setzt voraus, dafs der Gegenstand der Rechnung oder der geometrischen Betrachtung seine Prinzipien mitbringt, denen sie sich lediglich zu fügen hat. Sind diese richtig und zwingend, so wird auch die Verbindung mit mathematischen Operationen nicht zu unzutreffenden Ergebnissen

---

[1]) FRIES, Versuch einer Kritik der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Breslau 1842.

[2]) „Über den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit“. Berichte der bair. Akad. 1892.

führen können. Irrtum kann nur infolge unrichtiger Anwendung der mathematischen Entwickelungen entstehen, wenn nicht etwa Verstösse gegen die Elementaroperationen, gemeine Rechenfehler, vorliegen. Überall, wo die Bezeichnung einer Disziplin durch das Attribut „mathematisch“ eingeschränkt wird, ist die Mathematik die Dienerin und absolut zuverlässig, wenn ihre Dienste sich aus der Natur der Disziplin notwendig ergeben; sie wird zum Ornament, wo sie ohne Not herangezogen wird, zum Irrlicht, wo sie völlig der Rechnung Widerstrebendes beleuchten soll. Das „quod erat demonstrandum“ unter den philosophischen Beweisen der Metaphysik bringt die beiden letzten Qualitäten sehr deutlich zur Erscheinung.

Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung müssen dem gesunden Menschenverstand entstammen; die der Rechnung selbst müssen mathematischer Natur sein. In der That werden sich diese letzteren als ebensoviel Sätze der Kombinatorik zu erkennen geben, wenn man es nicht etwa mit Anwendungen auf stetige Gröfsen zu thun hat, bei denen die Kombination in analytische Operationen übergeht.

Soll nun die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten irgend welche objektive Geltung haben, so mufs der Begriff „wahrscheinlich“ in seiner gewöhnlichen Bedeutung auch hier zugrunde gelegt werden. Die Unterscheidung einer philosophischen und mathematischen Wahrscheinlichkeit, die in der Regel Fries zugeschrieben wird, aber sich schon bei Kant und älteren Schriftstellern findet, hat nur einen Sinn, wenn die letztere als ein besonderer Fall der ersteren anzusehen ist. Die mathematische Evidenz, mit der auch das Wahrscheinlichkeitsurteil ausgestattet sein kann, verdankt es nicht dem Begriffe des Wahrscheinlichen, sondern sie ruht in den Voraussetzungen, welche die Rechnung zulassen. Wir unterscheiden auch nicht die physikalischen Erscheinungen, Gravitation, Wärme, Elektrizität, von dem, was wir durch die Rechnung über sie feststellen, indem wir etwa neben einer empirischen eine mathematische Gravitation als wesentlich zu Trennendes statuierten, obwohl wir uns bei jeder mathematischen Behandlung immer gegenwärtig zu halten haben, dafs wir mit Abstraktionen operieren, denen in der Wirklichkeit absolut Übereinstimmendes weder entspricht noch entsprechen kann.

Nur lassen wir beim Wahrscheinlichen hier wie dort den Verstand allein sprechen; das subjektiv Wahrscheinliche, das von Stimmungen, Temperament und sonstigen Eigenschaften der Seele abhängt, gehört, auch wenn es eine allgemeine Behandlung zulassen würde,

in den Bereich der Psychologie, obwohl sicherlich beide Arten des Wahrscheinlichen häufig zu gemeinsamer Betrachtung Anlafs geben, wenn z. B. übertriebene Vorstellungen von der Gefahr des Gewitters, einer Krankheit, der Eisenbahnunglücksfälle u. dgl. durch statistische Zahlen widerlegt werden können. — Ebenso werden wir von der Betrachtung den „logischen Schein“ auszuschliefsen haben, der Urteilen in „metaphysischer Absicht“ anzuhaften pflegt; was nicht in allgemein gültiger Weise ausgesprochen werden kann, giebt einen guten Gaul für die Parade und das Manöver; wenn aber mit Kugeln geschossen wird, ist er Feind und Freund nichts nütze.

In neuerer Zeit ist das disjunktive Urteil in Verbindung mit dem Wahrscheinlichkeitsurteil gebracht worden. Es ist wohl in erster Linie LOTZE, der die Beziehungen blofsgelegt hat; SIGWART, LANGE und in neuester Zeit STUMPF schliefsen sich an. Mit dem disjunktiven Urteil geben wir entweder eine Einteilung, oder wir legen eine solche zugrunde, um eine abschliefsende Reihe von Möglichkeiten auszusagen. Ein Kegelschnitt ist entweder eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel. Hier giebt das disjunktive Urteil eine Einteilung, deren Notwendigkeit durch eine Reihe anderer Urteile ableitbar ist. Das disjunktive Urteil setzt, wie jedes andere, eine Begründung voraus, die durch einen Thatbestand, ein Verhalten, sei es auf empirischer Grundlage, sei es auf der Basis von apriorischen Erwägungen, gegeben wurde. Wie jedes Urteil, ist auch dies den verschiedenen Arten der Modalität unterworfen, aber welche Form ich auch wähle, stets bedingt das disjunktive Urteil einen problematischen Inhalt hinsichtlich der einzelnen Prädikate in einer Aussage, die für eines derselben Wirklichkeit oder Notwendigkeit erfordert. Diese Kurve kann eine Ellipse, eine Hyperbel oder eine Parabel sein, setzt eine jede als möglich, und wenn das Urteil einen Sinn haben soll, so schliefst es die irgendwie gewonnene Überzeugung ein, dafs die zur Verfügung stehenden Merkmale auf einen Kegelschnitt hinweisen, jedes andere Gebilde aber mit Notwendigkeit ausschliefsen. Man sieht nun leicht ein, dafs die verschiedene Modalität in einer Aussage dieser Art nur eine scheinbare ist in dem Sinne, dafs im Wesen eine notwendige Behauptung vorliegt, wenn die Disjunktion begründet und als notwendig nachgewiesen ist[1]). Hat das disjunktive Urteil nicht den ausgesprochenen

[1]) Vgl. KANT, Kritik d. r. V. (KIRCHMANNsche Ausg. S. 117). „Es ist also in einem disjunktiven Urteil eine gewisse Gemeinschaft der Erkenntnisse,

Zweck, eine Einteilung zu liefern, so schliefst es immer einen Zweifel ein. Wir wissen nicht, was wir sagen sollen: diese Kurve ist eine Ellipse, diese Kurve ist eine Hyperbel, diese Kurve ist eine Parabel. Will man also mit LAPLACE sprechen, so kann man sagen: es hängt teils von unserer Kenntnis, teils von dem ab, was wir nicht wissen. Aber das ist weder das Wesen des disjunktiven noch das des Wahrscheinlichkeitsurteils, sondern es ist eine Eigentümlichkeit des Erkennens überhaupt, dafs es von dem abhängt, was wir wissen, und was wir nicht oder noch nicht wissen. Von Bedeutung für die Disjunktion kann nur sein, dafs wir sie aufstellen können. Sind wir erst im Klaren über ein Glied der Disjunktion, so fällt diese für das Urteil hinweg, und unsere Aussage wird eine ganz bestimmte. Auch wenn wir Grund zu der Annahme haben, dafs jene Kurve eher einer Parabel als einem der beiden anderen Fälle entspricht, wird das im Urteil ausgesprochen werden müssen, wenn sonst das Urteilen als das Verknüpfen der Begriffe nach dem Stande unseres Wissens noch einen Sinn behalten soll.

Eine Disjunktion, die wir immer aussprechen können, ist die durch das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten vorgeschriebene. $A$ ist entweder $B$ oder es ist Nicht-$B$. Hat es jemals einen Sinn, sie zu bilden, so kann man damit nur beabsichtigen, auf ein jedermann verständliches Verhalten unseres Denkens hinzuweisen, oder aber man will erhärten, dafs man über ein $A$ schlechterdings nichts auszusagen vermag, was eine Verknüpfung mit jenem $B$ zuliefse. Ein Wahrscheinlichkeitsurteil darauf zu gründen, würde der gewöhnliche Verstand nicht zulassen, wenn es mehr besagen soll, als: $A$ kann ein $B$ sein, oder es kann auch ein Nicht-$B$ sein. Jene Frage, ob auf dem Sirius sich Eisen vorfindet oder nicht, wird ganz sinnlos für irgend eine objektive Aussage, wenn man sich auf den Standpunkt völliger Unkenntnis stellen soll. Was soll man hinwegdenken? Was vom Sirius gewufst wird, oder was vom Eisen unserer Kenntnis unterliegt, oder beides? Ist es jemals, wenn wir gar nichts wissen, als dafs $A$ wohl ein $B$ sein kann oder auch nicht, für den Verstand möglich, zu sagen: es ist ebenso wahrscheinlich, dafs $A$ ein $B$ ist oder nicht? Dann brauchten wir den Begriff der Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht und könnten uns mit dem

---

die darin besteht, dafs sie sich wechselseitig einander ausschliefsen, aber dadurch im ganzen die wahre Erkenntnis bestimmen, indem sie zusammengenommen den ganzen Inhalt einer einzigen gegebenen Erkenntnis ausmachen."

„Möglichen“ begnügen. Aber das Mögliche läfst Grade überhaupt nicht zu. Die Graduierung führt eben zu einem andern Begriffe. Wo aber unsere Kenntnis nur ausreicht, die Möglichkeit auszusagen, besagt die „gleiche Möglichkeit“ für ihr kontradiktorisches Gegenteil wiederum nicht mehr als eben Möglichkeit. Cäsar kann entweder lebendig oder tot sein. Werde ich wirklich aussagen: „es ist für mich gleich wahrscheinlich, dafs er lebt oder tot sei“, indem ich dem Begriff Cäsar nur beilege, dafs er ein menschliches Individuum bezeichnen soll? Von einem Wahrscheinlichkeitsgrade kann hier weder im gewöhnlichen Sinne, noch weniger aber in dem der mathematischen Bestimmung die Rede sein. Wenn Cäsar als Mensch auf die Welt gekommen ist, so wird er gewifs sich jener Disjunktion fügen müssen, aber weder liegt in dieser eine Grundlage noch in der ganzen Frage eine Nötigung zum Wahrscheinlichkeitsurteil. — Gewifs, die Logik hat zunächst gar nichts mit dem Interesse, das wir mit irgend welchen Denkoperationen verbinden, zu schaffen. Aber bis zu einem gewissen Grade haben alle ihre Untersuchungen doch den Sinn, unser Verfahren beim Erkennen als ein Mittel zum Zweck zu betrachten. Unser Urteil, sofern es irgend welche Bedeutung für irgend etwas haben soll, mufs zunächst als Antwort auf eine vernünftige Frage und fernerhin durch alle Gründe befestigt sein, die es überhaupt zu stützen vermögen. Welchen Wert hat es, ganz leere Fragen aufzuwerfen, an denen Niemand das geringste Interesse haben kann und sodann auf die Absurdität einer möglichen Antwort hinzuweisen? Das Wahrscheinliche hat nur Bedeutung für das Erkennen und mittelbar für unser Handeln. Die formale Logik des Aristoteles hatte gar kein Interesse, sich mit diesem Begriff und seiner Denkungsweise abzugeben; es läfst sich schlechterdings nicht auf eine reine Form bringen, die jedes Inhalts entbehrte und lediglich unser Denken an und für sich blofslegte.

Wenn wir sagen: $A$ ist wahrscheinlich $B$, so können wir die Verknüpfung dieses Urteils nicht anders bewirkt denken, als mit Rücksicht auf eine Reihe von Gründen, die seine Prädizierung unterstützen. Denkprozefs und Aussage folgen sich in einem derartigen Urteil nicht mit der Geschwindigkeit, wenn das zu sagen erlaubt ist, wie bei dem Urteil: $A$ ist $B$, das in sehr vielen Fällen mit dem Anschauen des $A$ und dem Bewufstsein und Besitz des Begriffes $B$ fertig erscheint.

Die Mefsbarkeit des Wahrscheinlichen im gewöhnlichen Ge-

brauch scheiterte an dem Mangel einer Vergleichbarkeit der Gründe. Weder genügt es im allgemeinen, diese zu zählen, noch kann es notwendig geltende Bestimmungen geben, die den Wert des einen Arguments nach dem eines andern zu messen gestatteten. Andererseits zeigte aber doch die Abstufung, die wir bei der Zuerkennung des Attributs „wahrscheinlich" vorzunehmen genötigt und auch zum Teil imstande sind, dafs eine zahlengemäfse Angabe für einen Grad des Wahrscheinlichen, wenn auch im allgemeinen unmöglich, so doch dem Begriffe selbst durchaus nicht zuwider ist. Jedenfalls können wir ihn komparieren. Von drei Aussagen, die sich auf denselben Gegenstand beziehen, können wir wohl aussagen, dafs die eine wahrscheinlicher ist, als die andere, und dafs eine von ihnen die wahrscheinlichste ist. Es ist wahrscheinlich, dafs dieser fremde Mann, der mir auf der Landstrafse begegnet, aus einem der nächstgelegenen Orte ist; es ist wahrscheinlicher, dafs er aus dem Lande stammt, in welchem ich mich befinde, und es ist am wahrscheinlichsten, dafs er ein Deutscher ist. Hier leitet nur der gröfsere Umfang, den ein jeder der prädizierten Begriffe besitzt, das Urteil. Gewifs wird es noch andere Kennzeichen geben, die mich nach der einen oder andern Richtung zu bestimmen in der Lage sind. Indessen kommt es uns darauf an, eine Abstraktion vorzubereiten, die wir allerdings in den meisten Fällen uns zumuten, wenn wir eine mathematische Wahrscheinlichkeit aussprechen. Es wird sich darum handeln, zu ermitteln, welche Momente, die in einer Wahrscheinlichkeitsaussage zu liegen pflegen, ausgeschlossen werden müssen, um zu einem Mafsstab für die Wahrscheinlichkeit zu kommen. Und da ist ganz summarisch zu verfahren. Alles, was mein Urteil nach der Richtung beeinflufst, eher ein Fürwahrhalten als den Zweifel aufrechtzuerhalten, ohne dafs es sich auf Zahl und Gröfse bringen läfst, mufs beseitigt sein, damit man dem Begriffe der mathematischen Wahrscheinlichkeit gerecht werden könne.

Ob es morgen regnen wird? Angenommen, uns wären alle Bedingungen genau bekannt, welche den Regen herbeiführen, und welche am vorhergehenden Tage erfüllt sein müssen, damit er am folgenden eintrete, so könnten wir zu einer zahlenmäfsigen Bestimmung nur dann kommen, wenn wir wüfsten, wie die einzelnen sich zu dem Gesamtkomplex verhalten, welcher Wert einer jeden einzelnen gegenüber allen anderen zuzusprechen sein müfste. Wie will man sonst sagen: die Bedingungen sind etwa zur Hälfte oder zu drei Vierteln erfüllt? Wenn aber eine grofse Zahl von Beobachtungen

vorlägen, die für unsern Ort eine Reihe von völlig gleichen Erscheinungen aufzeigten — man denke sich dieselben so umfassend, als sie nur sein können —, während doch die Bedingungen völlig unbekannt sind, und jene Zählung würde gleichzeitig nachweisen, dafs jedesmal der folgende Tag in einer ebenso grofsen Zahl der Fälle Regen ergeben hat, als Sonnenschein, würde man auch dann nicht berechtigt sein, zu sagen: es ist ebenso wahrscheinlich, dafs meine Vorhersage guten Wetters zutrifft, als nicht?

Was berechtigt uns zu dieser Aussage, von der wir überzeugt sind, dafs sie mit dem gewöhnlichen Denken der Menschen in Übereinstimmung sich befindet? Indem wir gewisse Beobachtungen über Temperatur, Barometerstand, Feuchtigkeitsgehalt der Luft, die Windrichtung anstellen liefsen, waren wir überzeugt, dafs alle diese Momente ebensoviele Bestimmungen abgaben für das Wetter von heute; dafs aber das Wetter von morgen in einem natürlichen Zusammenhang mit den Erscheinungen stehen müsse, welche von ihm abgelöst werden, lehrt eine einfache, auch dem Blödesten unumgängliche Überlegung. Jener Zusammenhang, dessen exakte Darstellung für uns unmöglich ist, hat in einer Reihe von Fällen Regen herbeigeführt, in einer andern, gleich grofsen Zahl seine Bedeutung in anderer Weise manifestiert. Für unser Urteil liegt also in der Zahl der Regenfälle und der anderen Wettererscheinungen die einzige Begründung für ein Wahrscheinlichkeitsurteil, das nun, frei von allen Einzelerwägungen, lediglich darauf angewiesen ist, sich auf etwas Abzählbares zu stützen. Wie sich völlig von selbst versteht, müssen die Zahlen, die uns zur Richtschnur dienen, immer in irgend einer Weise legitimiert sein, die jeden vernünftigen Einwurf unmöglich macht. Es genügt nicht zu sagen, dafs unsere Unkenntnis schlechthin das Wahrscheinlichkeitsurteil begründe. Wir wissen auch sicher, dafs kein Zusammenhang besteht, wenn wir in 100 Fällen aus Vergefslichkeit den Regenschirm zu Hause gelassen haben und in 50 davon ein Regenwetter uns unangenehm überrascht hat. Sollen wir dann aussagen: immer wenn wir ohne Regenschirm ausgehen, besteht die gleiche Wahrscheinlichkeit dafür, dafs es regnen wird oder nicht?

Unser Beispiel anticipiert das, was man eine empirische Wahrscheinlichkeitsbestimmung nennt. Kein Wunder, dafs dabei kausale Beziehungen mit ins Spiel kamen. Nehmen wir ein anderes. Wenn man mit zwei Würfeln im Becher wirft, so kann der Fall 10 Augen durch die Zahlenverbindungen

4 + 6, 5 + 5, 6 + 4

also auf drei verschiedene Weisen, entstehen, während sechs Augen, durch die Würfe

1 + 5, 2 + 4, 3 + 3
5 + 1, 4 + 2

also auf fünf verschiedene Weisen, getroffen werden können. Jedermann wird zugeben, das der zweite Fall wahrscheinlicher ist, als der erste. Es ist auch ganz gleich, ob wir würfeln, oder ob Jemand die beiden Würfel ohne Wahl und ohne unser Vorwissen irgendwohin gelegt hat, oder ob wir nach einer Zahl von zwei Stellen, in welchen nur die ersten sechs Ziffern stehen können, mit Rücksicht auf die Quersumme 10 oder 6 die Frage stellen. Aber wenn der Begriff der Wahrscheinlichkeit noch einen Sinn behalten soll, so mufs doch auf irgend eine Weise eine der Zahlen 46, 55, 64, 15, 51, 24, 42, 33 durch Zählbares oder auch nur durch das Bild der Zahl mit Rücksicht auf jene Quersumme wirklich hergestellt sein. Soll denn der Sinn des Urteils: der zweite Fall ist in jeder von den zu wählenden Aufgaben wahrscheinlicher als der erste, nichts weiter besagen als: Es giebt mehr Fälle einer zweiziffrigen Zahl von der Quersumme 6 als von der Quersumme 10, wenn nur die Ziffern 1 bis 6 verwandt werden? Was soll dann noch die Aussage der gröfseren Wahrscheinlichkeit?

Unsere Bemerkungen richten sich gegen die Auffassung, welche Stumpf in aller Entschiedenheit vertritt, einmal indem er Kritik anlegt an den „Ausgangspunkt“ Laplaces, der Erörterungen über die Unverbrüchlichkeit des Kausalgesetzes an die Spitze seines berühmten Essays stellt, andererseits indem er gelegentliche Äufserungen neuerer Philosophen mit seinem Urteil streift. Wir werden verschiedentlich Gelegenheit nehmen, uns mit der wichtigen Publikation auseinandersetzen, und bemerken vorweg, dafs sie unter den neueren uns bekannten Abhandlungen über denselben Gegenstand eine hervorragende Stelle einnimmt. Stumpf hat zweifellos recht, wenn er die Definition des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs frei halten will von Erörterungen, die sich auf die Kausalität und unsere Stellung zu ihr beziehen, aber nicht, weil dieser Begriff „keinerlei Voraussetzungen oder Überzeugungen hinsichtlich der objektiven Welt einschliefst, insbesondere auch nicht die der Gültigkeit des Kausalgesetzes“, sondern im Gegenteil, weil der Begriff der Wahrscheinlichkeit diese Voraussetzungen samt und sonders enthält. Der Mathematik ist allerdings der Begriff der Kausalität so fremd wie

der von gut und böse, aber die Wahrscheinlichkeit setzt ihn notwendig voraus. Jene reine Intelligenz, die er setzt (S. 49) und über eines von sechs im leeren Raume schwebenden verschiedengestalteten Atomen eine Wahrscheinlichkeitsaussage machen läfst, vermögen wir nicht zu kontrolieren. Aber, so fragen wir, welches Interesse kann ein reiner Verstand haben, eine Frage nach der Wahrscheinlichkeit aufzuwerfen, dafs ein Atom, das müfsig im Raum als eine Welt für sich schwebt, die Kugelform oder die des Tetraeders habe? Nun wohl, es sind im ganzen sechs solcher Atome vorhanden, eine Kugel und fünf Tetraeder. Wo hat der reine Verstand seinen Begriff der Wahrscheinlichkeit her, wenn er schon zählen und sich diese Daten geben lassen kann? Wir sind nur mit einem Fufse in der Mathematik; mit dem andern stehen wir auf völlig realem, bekanntem und vielfach durchgeackertem Boden. Was würde man von dem Begriffe des freien Falles sagen, wenn man ihm nachsagte, dafs er keinerlei Voraussetzungen über ein Geschehen enthalte? STUMPF redet dem allgemeinen Gebrauch des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs das Wort; weder die Zeit noch Einzelnes oder Allgemeines sind imstande ihn vernünftigerweise einzuschränken; alles das ist sehr richtig und in vielen Beziehungen eine Klärung gegenüber älteren und neueren Anschauungen. Er ist eben eine Spezialisierung des allgemeinen, dem alltäglichen Denken entnommenen Begriffs, aber nur sofern die Gründe für die Aussage in einer ganz besonderen Weise beschränkt werden, hebt er sich aus dem allgemeinen Bezirk des Wahrscheinlichen heraus. So wenig in dieser Spezialisierung eine Einschränkung in jenem Sinne liegt, welcher nur auf künftige Ereignisse oder auf eine grofse Zahl von Fällen rechnet, so entschieden mufs betont werden, dafs alles, was uns sonst bestimmt hat, den allgemeinen Begriff zu bilden, auch in der Besonderheit ein Charakteristikum für ihn abgeben mufs. Nach STUMPF verbleibt als allgemeines Merkmal nur die Disjunktion, der meines Erachtens der Begriff „wahrscheinlich“ nicht entstammt, obwohl sie ihn im Einzelfalle im Verstande auszulösen vermag; diese Disjunktion erfährt bei ihm eine Umprägung, die dem Original täuschend ähnlich sieht. Für diese im Wesen der ursprünglichen identischen Aussage haben wir die Etikette „wahrscheinlich“ mit demselben Recht, mit dem wir etwa einer Flasche kohlensäurehaltigen Wassers aufschreiben: „Sekt in Civil“ oder warum nicht „mathematischer Champagner“?

Es bleibt eben nichts übrig als das Wort; das Wesen hat

sich verflüchtigt. Was soll die Wahrscheinlichkeitsaussage einer reinen Intelligenz? Ein Denkapparat, der nur die Formen, die wir von unserem Verstande abstrahiert haben, als eisernen Bestand repräsentiert, kann keine Aussage enthalten, der irgend ein Inhalt zukommt. Gleichviel, wo wir etwas als wahrscheinlich aussagen und eine mathematische Charakteristik für möglich halten, ist aber immer ein irgendwie geartetes Geschehen seine notwendige Voraussetzung. Unsere Abstraktion bezieht sich nur auf ein Netz von Kausalitätsbeziehungen, dessen Verknüpfung zu lösen wir unserem Verstande nicht zumuten dürfen, während uns in den Zahlenverhältnissen eine Richtschnur für das Urteil verbleibt, sofern dieselben an dem Geschehen, ob es in der Vergangenheit oder Zukunft liegt, irgendwie beteiligt zu denken sind. Die Zahl der Kugeln in der Urne ist allerdings nicht die causa efficiens, aber in dem Gesamtvorgang des Ziehens einer Kugel, der sich nur schematisch auf ein einfaches Spiel von Ursache und Wirkung bringen liefse, haben auch die Kugeln und ihre Zahl einen Platz, der ebenso sehr den Erfolg bestimmt, als irgend welche Kräfte, die wir da setzen, wo wir ein Geschehen auf seine Ursachen zurückführen. Das ist keine mystische Abart der Kausalität, sondern eine völlig natürliche Verfahrungsweise unseres Verstandes. Wenn ein Heer von 100 000 Mann einem Feinde von 10 000 Mann gegenübersteht, so halten wir den Sieg der Übermacht, auch wo wir über die für das Urteil mafsgebenden Einzelverhältnisse gar nichts wissen, für wahrscheinlich, und es wäre sehr einfach, auch hier eine mathematische Wahrscheinlichkeit eigener Art für den Erfolg zu konstruieren und zu definieren, wie es ja auch thatsächlich geschieht, wenn jemand auf jene Daten eine Wette von 10 : 1 proponiert. Enthält nun ein solches Urteil, das in der Form völlig mathematisch wäre, keinerlei Voraussetzungen über die wirkliche Welt? Wo ist denn die Grenze zwischen reiner und angewandter Mathematik zu suchen, wenn die mathematische Wahrscheinlichkeit zu der ersteren in irgend einer Weise gerechnet werden soll? Für die reine Intelligenz wie auch für den gesunden Verstand, wäre es ein Luxus, anstatt zu sagen: „Dies ist eines von 6 Atomen, die mich zu einer bestimmten Disjunktion veranlassen, die Behauptung aufzustellen: Es ist $\frac{1}{6}$ wahrscheinlich dies und $\frac{5}{6}$ jenes, wenn nicht damit behauptet werden soll: Diese Stelle konnte eher von einem der f ü n f Tetraeder ausgefüllt werden, weil sie nur mit e i n e r Kugel in gleichberechtigter Konkurrenz sich befunden haben. Was soll sonst die ganze Wahrscheinlichkeitsaus-

sage? Zum Abzählen braucht man sie doch nicht. Wo ist in der reinen Mathematik eine Methode, die dem Verfahren entspricht? Welcher Mathematiker würde wohl sagen: Diese Kurve kann eine Ellipse, Hyperbel oder eine Parabel sein, also ist die Wahrscheinlichkeit für eine jede $\frac{1}{3}$? Er würde die Natur der Aufgabe zu prüfen haben; versagen aber alle Mittel, findet sich wirklich kein Anhalt, der für die eine oder andere Gestalt der Kurve spricht, so würde er aus Gründen der Mathematik sicherlich die formelle Modifikation des Urteils nicht vollziehen, wenn nicht ein praktisches oder aufserhalb liegendes theoretisches Interesse dazu aufforderte. Aber angenommen, er wäre so genötigt, eine Wahrscheinlichkeitsaussage zu machen, was kann ihn bewogen haben, eine der drei Möglichkeiten zu statuieren? Angenommen ferner, das ganze Problem wäre auf rein mathematischem Boden erwachsen, was sehr unwahrscheinlich ist: wären nicht bei dem Mathematiker vorauszusetzen „alle Überzeugungen" über die Gültigkeit der mathematischen Gesetze selbst? Aber Jedermann wird zugestehen, dafs diese Art der Betrachtung der Geometrie nicht nur ebenso fremd wie die ethischen Begriffe, sondern auch völlig ihrem ganzen Charakter zuwider ist. Nicht für die mathematische Untersuchung, welche die Krücke der Wahrscheinlichkeit nicht gebraucht und, wo sie im Unklaren ist, sie geradezu verschmäht, ist die Wahrscheinlichkeit da, sondern die mathematischen Methoden sind für die Wahrscheinlichkeit vorhanden, sofern uns ein Zweifel über einen Thatbestand, ein Verhalten und Geschehen beigeht, und der Gegenstand der Aussage eine Abzählung der Gründe dafür und dawider ex natura sui generis zuläfst.

Oder irre ich mich? Die Primzahlen sind bis zu einer Milliarde etwa gezählt. Wenn nun Jemand sagte: auf Grund dieser bestimmten Zählung ist die Wahrscheinlichkeit für irgend eine Zahl des darauf folgenden, ebenso grofsen Zahlenraums, dieser bestimmte Quotient — halt! würde der Mathematiker sagen, was berechtigt dich zu dieser Bestimmung? Ich weifs ganz und gar nichts über die spätere Frequenz. Ist auch alles berücksichtigt, was aus der ersten bekannten Reihe für die folgende hervorgeht? Und wenn das auch wäre, so würde der Mathematiker keinerlei weitere Schlüsse auf solchen Quotienten wagen. Es widerstrebt diese Art der Betrachtung der Mathematik vollständig. Allerdings bietet z. B. die Theorie der Zahlen für den Mathematiker ein Gebiet, auf dem er von der Naturwissenschaft das Verfahren der vorläufigen Induktion, wie

man die Herleitung einer allgemeinen Regel aus Einzelbetrachtungen nennen könnte, deren Zusammenhang man noch nicht begründen kann. Auffallende Übereinstimmungen, die sich ohne ersichtlichen Zusammenhang dem Blick bieten, legen oft die Vermutung nahe, dafs sich allgemeine Beziehungen in ihnen spezialisiert finden. Man kann auf sie aufmerksam machen, aber ohne Beweis bleibt die ausgesprochene Vermutung wertlos. Wenn die Zahl der „beobachteten Fälle" sehr grofs ist, so wird auch der Mathematiker sagen, dafs ein allgemeines Gesetz wahrscheinlich sei. Aber was berechtigt zu der Meinung? Doch nur die Ansicht, dafs ein Spiel des Zufalls hier ganz ausgeschlossen sei, und dafs feste Gesetze regieren, die sich im individuellen Falle ähnlich offenbaren, wie irgend ein Naturgesetz, das wir durch einen einzigen, vorsichtig gemachten Versuch feststellen. FERMAT sah, dafs die Zahlen

$$2^1+1, \qquad 2^2+1, \qquad 2^4+1, \qquad 2^8+1, \qquad 2^{16}+1$$

Primzahlen sind, und behauptete, dafs alle anderen Zahlen von der Form $2^{2^a}+1$ es ebenfalls sind. EULER zeigte nun, dafs $2^{32}+1$ gegen diese Annahme aus zwei Faktoren sich zusammensetzen läfst. Aber wahrscheinlich war für den Mathematiker FERMAT die Behauptung, so wahrscheinlich, dafs er sie für sicher hielt, und doch würde die Disjunktion mit ihren unendlich vielen Gliedern, auch wenn wir die 5 ersten Primzahlen von der Form $2^{2^a}+1$ in Bezug auf den Wert für das Urteil noch so hoch einschätzen, eine minimale Wahrscheinlichkeit für den allgemeinen Satz ergeben.

Wären solche Urteile nicht völlig fruchtlos, so könnte man sich versucht fühlen, für diesen besonderen Fall der Wahrscheinlichkeitsaussage den Begriff der „mathematischen Wahrscheinlichkeit im eigentlichen Sinne" einzuführen. Das Beispiel scheint mir hinreichend zu beweisen, dafs jede Verwendung des Begriffes durchaus von der Natur der Disziplin abhängt, in der wir ihn anwenden. Was bedeutet es anders, wenn in neuerer Zeit von „statistischer" Wahrscheinlichkeit gesprochen und dieser terminus für den Gebrauch vorgeschlagen wird, weil man aus den Auseinandersetzungen mit der Mathematik nicht herauskommen kann? Eine reine, schlechthin logische Wahrscheinlichkeit kann es nicht geben, denn immer ist eine Kenntnis vorauszusetzen, die nicht inhaltslos sein kann, und ein irgend wie geartetes Interesse, das uns nötigt, unter verschiedenen Urteilen eine Wertung herzustellen, die diese entweder alle als gleichberechtigt oder als von verschiedenem, mehr oder minder genau angebbarem Wert für eine Entscheidung des Urteils erscheinen läfst.

Eine mathematische Wahrscheinlichkeit, deren Urteilsform wie ein besonderes logisches Schema dem Verstande vorschwebte, giebt es also überhaupt nicht. Was an ihr logisch ist, entspricht den allgemeinen Anforderungen; sie mufs begründet sein, wie jede andere auch. Die Formen reichen nicht aus, uns den Begriff zu verschaffen, wie das Urteil: $S$ ist $P$ uns nicht sagt, dafs ein Pferd ein Säugetier ist. Das Formale liegt bei jeder Art, die Dinge zu beurteilen, im Begriff, in der Anschauung und in ihrer Verknüpfung; es ist dasselbe für die Wahrscheinlichkeitsaussage wie für jede andere. Dem mathematischen Urteile ist nur eigen, dafs wir in unseren Aussagen uns auf Gröfsenverhältnisse beschränken; wofern wir es anwenden, mufs es auch gestattet sein, von allem abzusehen, was wir vom Prädikat ausschliefsen. Aber damit ist nicht gesagt, dafs wir in irgend einer Wissensmaterie, indem wir uns auf mathematische Aussagen beschränken, die Voraussetzungen über Bord werfen, welche eben sie immer verlangt. Wir hatten betont, dafs eine jede Wahrscheinlichkeitsaussage alle Voraussetzungen nötig hat, die im Erkennen überhaupt enthalten sind. Dafs zu diesen die Gültigkeit des Kausalitätsgesetzes notwendig gehört, scheint uns unumstöfslich. Die Mathematik führt in ihrem Bereich nirgends auf kausale Beziehungen; sie ist in der That auch denkbar, ohne dafs Kausalität überhaupt herrscht, obwohl man sich ja nicht vorzustellen vermag, was überhaupt irgend welche Erkenntnis zu bedeuten hätte, wenn das Kausalitätsprinzip ungültig wäre. Genug, dafs die Kausalitätsbeziehungen auf dem durch unsere Abstraktion isolierten mathematischen Gebiete nicht anzutreffen sind, wird uns überzeugen müssen, dafs von Wahrscheinlichkeitsurteilen in dem Lehrgebäude der Mathematik selbst auch nicht entfernt die Rede sein kann, wie wir solche auch in der formalen Logik selbst nicht suchen dürfen.

Dafs die Zahl 7 durch 2 verschiedene ganzzahlige Summanden dreimal herstellbar ist, die 6 nur zweimal, ist eine mathematische Thatsache. Von Wahrscheinlichkeit, und zwar gröfserer Wahrscheinlichkeit, der Zahl 7 als Summe zweier Zahlen zu reden, hat aber der Mathematiker keinerlei Bedürfnis, wenn nicht die Summe auf irgend eine Weise realiter hergestellt werden soll, wie etwa, wenn aus einer Anzahl von Karten, die der Reihe nach die Ziffern

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6$$

tragen, zweimal gezogen werden soll. Wird dann die Frage nach der Wahrscheinlichkeit der Summe 7 aufgeworfen, so werden auch Kausalitätsbeziehungen zu erwägen sein, sei es, dafs ich aus-

drücklich sie veranschlage, oder dafs ich nach Lage des Falles den Verzicht ausspreche, sie zu berücksichtigen. Wir bemerken das ausdrücklich, weil man heutzutage hin und wieder die beiden ganz verschiedenen Fragen konfundiert, so dafs, was lediglich mathematische Zählarbeit, wenn auch auf Grund noch so feiner kombinatorischer Methoden, ist, als ein Resultat von Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen erscheint.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit hat den der Möglichkeit zu seiner Voraussetzung. Wer im gewöhnlichen Gebrauch das Wort wahrscheinlich anwendet, gleichviel, ob er von geringer oder grofser Wahrscheinlichkeit redet, will damit immer zugleich die Möglichkeit seiner Aussage behaupten. Ja, streng genommen, wenn wir von irgend einem Urteil aussprechen, dafs es ganz und gar keine Wahrscheinlichkeit habe, so läfst unser Sprachgebrauch noch immer zu, dafs es wohl möglich sei. Was ist nun möglich? Zutreffend und dem wissenschaftlichen Sprachgebrauch durchaus gemäfs „postuliert" KANT:

> „Was mit den formalen Bedingungen der Erfahrung (der Anschauung und den Begriffen nach) übereinkommt, ist möglich."

Ausgeschlossen wird durch diese Definition das nur Denkmögliche, das logische Widersprüche zwar nicht aufweist, aber nirgends in der Erfahrung angetroffen werden kann. Dafs in der Natur geistige Ursachen mitwirken oder allein wirken, ist ein möglicher Gedanke; nichts berechtigt uns aber, ihn in dem Sinne auszusprechen, dafs wir jemals in unserem theoretischen Erkennen jene geistigen Ursachen, wenn sie wirksam sind, vorfinden werden, oder auch nur uns diese Fähigkeit zuzusprechen. Das logisch Mögliche reicht nicht aus, ein Wahrscheinlichkeitsurteil zu begründen. Für dieses würde man immer Stützen haben müssen, die — logisch unumstöfslich — auch auf dem Boden der Erfahrung ruhen.

Jemand könnte, weil er die KANTsche Auflösung der Antinomien nicht zuzugeben gewillt, aber die Beweise für die Thesen und Antithesen nicht zu widerlegen imstande ist, sagen: es ist ebenso wahrscheinlich, dafs die Welt unendlich ist, als dafs sie es nicht ist. Ich weifs nicht, was mit einem solchen Urteile gewonnen wäre, und wer ein Interesse daran hätte. In der Erkenntnis bringt diese Aussage keinen Schritt weiter, und die praktischen Gesichtspunkte, welche für die eine Alternative jener Disjunktionen sprechen, können das Gleichgewicht niemals verändern. Religiöse Anschauungen lassen sich auf Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen nicht gründen, und wenn die mathe-

matische Wahrscheinlichkeit den Anspruch eines wissenschaftlichen Hülfsmittels erhebt, so verlangen wir von ihr, daſs sie eine Station markiert, die wirklich auf dem Wege zur vollständigen Erkenntnis liegt, nicht aber in den Lüften der aussichtslosen Spekulation schwebt.

Wir haben behauptet, daſs die Wahrscheinlichkeitsaussage alle Voraussetzungen einer jeden Erkenntnis mit sich führen muſs, [illegible] meinen, hierin auch mit Stumpf, der sich überaus vorsichtig ausspricht, übereinkommen zu können, da er sicherlich zugeben wird, daſs wenigstens die Disjunktion, die zur Wahrscheinlichkeitsaussage den Anlaſs giebt, jenen Voraussetzungen entsprechen muſs. Auch er will da, wo unsere Kenntnis eine Disjunktion der möglicherweise vorhandenen Ursachen gestattet, und dort, wo kausale Kenntnisse die Disjunktion gleichsam zu [illegible] nötigen, die Ursachen berücksichtigt wissen. Indessen zieht er aus seiner bereits wiedergegebenen Ansicht die äuſsersten Konsequenzen. „Indem Laplace in seiner Einleitung von der Unverbrüchlichkeit des Kausalgesetzes und unserem unbedingten Glauben an dasselbe ausgeht, hat er einen vielleicht didaktisch bequemen, aber für seine Definition nicht unumgänglichen Ausgangspunkt gewählt,“ heiſst es bei Stumpf. Soweit könnten wir mit ihm gehen, wenn wir auch die „didaktische Bequemlichkeit“ nur im Sinne der Unvollständigkeit auffassen würden. Die Betonung des Kausalgesetzes legt die Frage nach allen Gesetzen unseres Verstandes nahe. Diese eine Abstraktion wäre zu ergänzen gewesen, denn in jeder mit dem Anspruch auf Anerkennung ausgehenden Aussage haben sich sämtliche Vorbedingungen der Erkenntnis wie die Strahlen im Focus der Linse zu vereinigen. Es ist ein ganz allgemeiner Mangel der philosophischen Randbemerkungen in Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen, daſs sie uns eine Erkenntnis vermitteln möchten, zu der einige plausible Festsetzungen den Untergrund herstellen sollen. Man gewinnt fast den Eindruck, als ob man den ganzen Bau der Erkenntnis durch einen zierlichen, zum Eintritt einladenden Pavillon entlasten wollte, ein Spielzimmer neben dem Wirtschaftsgebäude.

Stumpf begnügt sich aber mit den citierten Worten nicht; er geht weiter und giebt prinzipiell auch Wahrscheinlichkeitsaussagen zu, die sich auf das Kausalgesetz selbst und seine Gültigkeit beziehen. Indem er so „diejenigen Philosophen, die das Kausalgesetz selbst für wahrscheinlich (sei es [illegible] unendlich wahrscheinlich) an-

sehen", von der Absurdität eines offenbaren Zirkels freispricht, setzt er die ganze Disziplin ebenfalls vor die Thür.

Nach Stumpf wären von jenem Standpunkte alle Wahrscheinlichkeitsergebnisse, die das Kausalgesetz bedingen, noch mit der Wahrscheinlichkeit des Kausalgesetzes zu multiplizieren. Die Feinheit dieses Gedankens wird durch den gewöhnlichen Verstand schwer erfaſst. Vielleicht kann ein Beispiel nützlich sein. Jedermann meint, daſs der Zug einer Eisenbahn durch den Dampf in Bewegung gesetzt und gehalten werde. Da aber das Kausalitätsgesetz nur die Wahrscheinlichkeit — nehmen wir 0,999999· · · · · hat, so ist es immerhin möglich, daſs hier noch andere, nicht kausale Momente mitwirken. Unendlich gering ist zwar nach dieser extremen Schätzung die Wahrscheinlichkeit, aber ausgeschlossen ist die Möglichkeit eines Wunders, das nicht kausal bedingt ist, und das immer eintritt, wo Lokomotiven gebaut und in Thätigkeit gesetzt werden, doch nicht. Stumpf selbst ist vom Kausalitätsgesetz und seiner allgemeinen Geltung überzeugt, aber die es nicht voll und ganz anerkennen, sind für ihn doch nicht auf logischen Abwegen. Von dem Zirkel, den sie anscheinend begehen, spricht er sie frei.

Der Begriff der Wahrscheinlichkeit hängt an dem der Gewiſsheit. Wie kann es irgend eine Gewiſsheit geben, wenn die Kausalität in Zweifel zu ziehen ist? Das vermögen wir weder einzusehen, noch mit irgend einem Sinne zu verbinden. Selbst die absolute Skepsis, wenn sie nicht zu einem wissenschaftlichen laisser faire führen soll, hat die Begriffe „Gewiſsheit" und „Wahrscheinlichkeit" nötig, und wenn sie nicht die auf Erkenntnis gerichtete Thätigkeit als völlig unsicher verbieten soll, so muſs sie jene Begriffe verwenden, weil sie immer sich so verhalten muſs, als ob es ein sicheres Wissen gäbe. Wie man jener vorgeschriebenen Multiplikation mit der Wahrscheinlichkeit des Kausalgesetzes zu genügen hat, wie Wahrscheinlichkeiten überhaupt abschätzbar sind, ohne daſs eine Disjunktion, sei es unmittelbar oder eben auf Grund von zahlenmäſsig geordneten Erfahrungen, vorliegt, das vermögen wir nicht zu sagen.

Im Wesentlichen zutreffend heiſst es bei Lotze (Logik S. 429): „Die Richtigkeit spezieller Gesetze, die sich auf eine Gruppe von Thatsachen beschränken, deren Nichtdasein selbst ebenso denkbar ist, als ihr Dasein, läſst sich, wie wir noch sehen werden, durch Rechnung prüfen, aber es giebt keinen zulässigen Ansatz, von dem aus man die Richtigkeit des Gesetzes der Identität oder des disjunktiven Lehrsatzes mehr oder minder wahrscheinlich finden könnte;

die einfachste Bestimmung jeder Wahrscheinlichkeitsgröſse setzt voraus, daſs eine Disjunktion aller möglichen Fälle gegeben, daſs jeder von diesen mit sich selbst identisch und nicht gleich einem andern, daſs endlich durch jeden alle übrigen ausgeschlossen seien. Man kann also immer nur die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses oder eines Zustandes oder einer Reihe von Begebenheiten prüfen, unter der Voraussetzung, daſs dieser fragliche Inhalt Bestandteil einer Welt sei, in der es allgemeine Gesetze giebt, nach denen sich Wahrheit von Unwahrheit, Möglichkeit von Unmöglichkeit, Leichtigkeit eines Erfolges von Schwierigkeit desselben unterscheidet. Dies ist jedoch nicht die einzige Beschränkung; die Wahrscheinlichkeitsrechnung darf den Gegenstand ihrer Frage als nicht bloſs denkbar schlechthin betrachten, sondern muſs das Vorhandensein von Bedingungen voraussetzen, welche überhaupt die Notwendigkeit der Verwirklichung eines der disjungierten Fälle mit Ausschluſs der anderen begründen; es muſs immer, um in der Sprache ihrer Formeln zu reden, eine Gewiſsheit = 1 geben, welche die Summe aller Wahrscheinlichkeiten der denkbaren Einzelfälle ist.“

Die theoretischen Wetten noch um eine für das Kausalgesetz zu vermehren, ist ein Weg, den man nicht betreten sollte. Oder sollen wir auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daſs die Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst streng gültig ist? Wir kämen aus dem Multiplizieren nicht heraus und müſsten den scherzhaften Anspruch Poinsots:

> „Après avoir calculé la probabilité d'une erreur, il faudrait calculer la probabilité d'une erreur dans le calcul“

tausendfach überbieten, wenn sich nicht etwa ein Genie findet, einen allgemeinen Unsicherheitsfaktor ein- für allemal auszuwerten.

Stumpf wendet sich gegen einen Ausspruch von O. Liebmann, den wir hier ebenfalls wiedergeben wollen:

> „Wer ausgerechnet hat, daſs beim Ziehen aus einer verdeckten Urne, welche $w$ weiſse und $s$ schwarze Kugeln enthält, die Wahrscheinlichkeit, im einzelnen Falle weiſs zu ziehen, $= \frac{w}{w+s}$ ist, der setzt eben schon voraus, daſs nicht durch ein Zauberkunststück oder ein Wunder die Anzahl der Kugeln unter der Hand vermehrt oder vermindert werde. Das heiſst: er setzt objektive Gültigkeit des Kausalprinzips voraus“ (Klimax der Theorien S. 91).

Daſs ein Zauberkunststück das Kausalgesetz nicht zu durchbrechen brauchte, kann man Stumpf zugeben, obwohl ja Liebmann

hier unzweifelhaft das Wort im Sinne eines unmöglichen Vorgangs gebraucht hat. Was L. sagen will, ist doch, daſs ohne Ursache das Verhältnis und die Zahl der Kugeln nicht zu verändern ist, und daſs eben darum, wie STUMPF sagen würde, jene Wahrscheinlichkeit „die zeitlose, logische Konsequenz" eben jenes Mischungsverhältnisses ist. Wenn „nicht das Kausalgesetz, sondern das der Identität verlangt, daſs ich das im Problem Gegebene nicht auch als nicht gegeben ansehe", so lieſse sich fragen: Was garantiert uns denn diese Identität in der wirklichen Welt, von der wir eine Aussage machen, wenn nicht das Kausalitätsgesetz? LIEBMANN will ja offenbar nichts anderes mit seiner Bemerkung als die unausgesprochenen Voraussetzungen zum Bewuſstsein bringen und das genau in dem Sinne, in welchem wir z. B. bei STUMPF selbst zwei Seiten vorher lesen (S. 51):

„Ist mir nicht gegeben, daſs ein Würfel gefallen ist (oder fallen wird), sondern daſs er geworfen ist (oder werden wird), so kann ich nur dann behaupten, daſs das Fallen einer Würfelseite $\frac{1}{6}$ wahrscheinlich ist, wenn ich voraussetze, daſs der geworfene Körper überhaupt zu Boden fällt und nicht etwa in der Luft hängen bleibt oder sich in nichts auflöst. Dann allein weiſs ich, daſs einer von den 6 verschiedenen Fällen eintritt."

Daſs uns das Kausalgesetz vielfach nicht weiter hilft, geben wir in viel allgemeinerer Fassung zu. Es hilft nie weiter, sondern es ist eine Bedingung der Erkenntnis überhaupt, und wenn von KANT irgend etwas Zutreffendes behauptet sein sollte, so ist es die „transscendentale" Bedeutung der logischen Funktionen. Sie helfen uns so wenig wie die Kanonen der modernen Artillerie. Aber wenn diese schieſsen, oder sagen wir, existieren will, so sind doch neben manchem andern wohl auch Kanonen nötig. Wer sich nicht auf das Kausalitätsgesetz verlassen wollte, der müſste auch für möglich halten, daſs er aus einer verdeckten leeren Urne, in die er soeben eine weiſse Kugel gelegt hat, irgend etwas anderes herausnehmen könnte. Er dürfte für die weiſse Kugel nicht die Wahrscheinlichkeit 1 aussprechen, sondern müſste nach STUMPF irgend einen Bruch, der sich nach Multiplikation mit der „Wahrscheinlichkeit des Kausalgesetzes" ergeben würde, ansetzen. Wir befürchten, daſs bei einer solchen Anschauungsweise nicht bloſs die Wahrscheinlichkeitsrechnung, sondern auch eine jede sichere Erkenntnis in die Brüche ginge.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir versuchen, zu einer

Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit zu gelangen. Insofern es sich dabei um den Begriff des gewöhnlichen Verstandes handelt, wird es sich fragen, inwiefern seine Graduierung lediglich Sache der Übereinkunft ist, und ob diese, wenn getroffen, imstande ist, eine objektive Beurteilung der Erkenntnisgegenstände zu geben, ob ferner auch eben diese Graduierung eine Verwertung des zugrundeliegenden sicheren Wissens zuläfst, und welches praktische Interesse die Anwendung des Begriffes mit sich führt.

Die Mathematik verlangt Gröfsenbeziehungen, die Wahrscheinlichkeit Gründe. Waren diese Gründe im allgemeinen nicht exakt wägbar und daher auch nicht für eine Rechnung zu verwerten, so werden wir auf Einschränkungen gefafst sein müssen, indem wir aus dem allgemeinen Begriff der Wahrscheinlichkeit den der mathematischen herausheben. Der Zweifel, durch unvollständige Kenntnis bedingt, läfst sich immer in einem disjunktiven Urteil aussprechen, das eine sichere Erkenntnis umfafst. Von den verschiedenen Formen der Aussage — ob sie hypothetisch, kategorisch oder assertorisch ist — können wir hier absehen; sie sind für die Disziplin ganz unwesentlich. Man kann die Beispiele nach Willkür in eine dieser Formen bringen, die von allgemeinster Bedeutung und daher unwesentlich sind. Die Beispiele, die zur Illustration gegeben werden, sind natürlich immer hypothetisch, ohne dafs sie diesen Charakter in der Form zum Ausdruck bringen müfsten. Sie setzen einen bestimmten Thatbestand und verlangen, dafs er behandelt werde, als wenn er wirklich wäre.

Eine weitere Vorbemerkung erscheint nicht unwichtig. Wo auch mathematische Betrachtung in einer Disziplin Platz greift, hat man sich immer gegenwärtig zu halten, dafs Konstruktion und Berechnung auf Voraussetzungen beruhen, die eine Abweichung von der Wirklichkeit nicht völlig ausschliefsen, vielleicht sogar sie notwendig bedingen. Der „schädliche Raum“, welcher hier ideale Verhältnisse von denjenigen der Objekte mehr oder minder zu unterscheiden gebietet, wird ein- für allemal zuzugestehen sein. Ein Vortrag über mathematische Physik z. B. würde keinen Schritt vorwärts gehen können, wenn er immer wieder auf jene Kluft hinweisen wollte, die übrigens auch zwischen den Begriffen und den Gegenständen, auf die sie bezogen werden, sich aufthut, wenn man schärfer vergleicht. Giebt es auch unter den Dingen eine absolute Gleichheit nicht, und kann sie nicht bestehen, so wird doch weder Theorie noch Praxis davon zurückgehalten, eine Ver-

tretbarkeit unter ihnen zur Grundlage unseres Schliefsens und Verhaltens anzunehmen. Das gilt auch dann, wenn wir über gewisse Arten des Geschehens zu urteilen haben. In den Beispielen ist ein Griff in die Urne jedem andern gleichzusetzen, wie eine jede Kugel, sofern wir ihr mit allen übrigen dieselben Merkmale beimessen, sich für uns von keiner anderen unterscheidbar zeigt. Für die Herleitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihrer Begriffe und Operationen hat man sich immer einer Reihe von Schematen bedient, die in Ziehungen aus Urnen, dem Würfelspiel, dem Lotto, überhaupt in Hasardspielen fast erschöpfend gekennzeichnet sind. Charakteristisch erscheint mir dabei, dafs man sich in den Lehrbüchern nicht mit der Kombination mathematischer Elemente hat genügen lassen, und wo es, wie bei MOIVRE, geschieht, die einzelnen Fälle durch verbale Wendungen sinnenfällig gemacht werden[1]). Die Disjunktion beliebiger, durch Buchstaben vertretener Elemente, mag doch nach allgemeiner Empfindung — es ist meines Wissens nirgends ausdrücklich ausgesprochen — nicht ausgereicht haben, einen Angriffspunkt für die Wahrscheinlichkeitsaussage, die immer ein theoretisches oder praktisches Interesse voraussetzt, zu bieten.

Bereits früher wurde bemerkt, dafs in den Grenzfällen sich die mathematisch bestimmte Wahrscheinlichkeit mit der des gewöhnlichen Verstandes völlig deckt. Aus einer Urne, in der sich nur weifse Kugeln vorfinden, kann keine anders gefärbte entnommen werden, und wenn eine gezogen wird, so bin ich des Resultats einer weifsen Kugel im voraus gewifs. Auf die Frage nach dem Zug einer s c h w a r z e n Kugel wäre h i e r also die Wahrscheinlichkeit absolut zu verneinen, so dafs sich die einzige „negative“ Gröfse, die Null, als mathematische Bestimmung von selbst bietet. Die in der Mathematik als negativ bezeichneten Gröfsen sind ja, wie KANT gelehrt hat, im wesentlichen als privative definiert, indem sie nicht blofs verneinen, sondern auch berauben. Die Null ist ein Grenzbegriff; sie wird, wie zu vermuten ist, auch eine reinliche Scheidung bewirken zwischen dem, was noch in das Gebiet der Wahrscheinlichkeit gehört, und was weder als wahrscheinlich noch als möglich anzusehen ist. In das Gebiet der realen Möglichkeit gehört nur, was erkannt werden kann. Die Null ist in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ein Ausdruck für die Unmöglichkeit; was darüber liegt, mufs unter allen Umständen noch eine Anzeige für ein wirkliches Geschehen, gehöre es der Vergangenheit, Gegenwart oder Zukunft an, abgeben können. Dafs beim

[1]) Vgl. CANTOR, Gesch. d. Math. III. Bd. S. 343.

Spiel 100mal nacheinander Kopf oder Schrift geworfen wird, ist sehr unwahrscheinlich, so unwahrscheinlich, dafs wir es nicht zu glauben brauchen, wenn es uns berichtet wird. Aber unmöglich ist es nicht. Auch wer keine Vorstellung davon hat, dafs er sich die Zahl, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung für diese Eventualität in dem kurzen Ausdruck $\frac{1}{2^{100}}$ bereit hält, gar nicht vorzustellen vermag, sieht die überaus minimale Wahrscheinlichkeit ein, aber er brauchte nicht an Wunder zu glauben, wenn das Unwahrscheinliche eingetreten wäre. Es hat auch keinen Wert, hierüber zu streiten. Die prinzipielle Frage kann unsere Pflicht, mit wissenschaftlichem Skeptizismus etwaigen ähnlichen Überlieferungen entgegenzutreten, ganz und gar nicht berühren. Aber ihre Entscheidung kann uns doch vorsichtig und kritisch machen gegenüber jenen Versuchen aus älterer und neuerer Zeit, aus einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit auf die Unmöglichkeit zu schliefsen. Nach berühmten Mustern ist im letzten Jahrzehnt von einem Mathematiker, der sich auf den Standpunkt seiner Vor-Vorfahren stellte, bewiesen worden, dafs seine eigene Existenz doch nur eine minimale Wahrscheinlichkeit innerhalb der natürlichen Kausalität habe, so dafs er eine höhere und zugleich auch die Unsterblichkeit seiner Seele zu behaupten berechtigt sei[1]). Die Unermefslichkeit der Aufgabe, welche uns die Welt stellt, in der wir leben und vergehen, die Langwierigkeit und Beschwerlichkeit des Weges naturwissenschaft-

---

[1]) Carl Piper: Ein mathematischer Beweis der Unsterblichkeit des Menschen. Lemgo.

Es ist schwierig, den Gedankengang des Verfassers kurz wiederzugeben. Seine eigenen Worte lauten so: „Aus der Annahme, dafs ich nur eine endliche Zeit lebe, würde die Thatsache, dafs mein Leben gerade in die Gegenwart fällt, nur mittelst einer unendlich geringen Wahrscheinlichkeit hervorgehen.“ Diese berechnet er im Bewufstsein, dafs sie viel geringer sei, indem er sich 3400 Jahre zurückversetzt, auf

$$\frac{1}{2^{113}} = \frac{1}{10\,384 \quad 593\,717 \quad 069\,655 \quad 653\,060 \quad 992\,658 \quad 440\,192}$$

indem er zugleich daraus schliefst, dafs die berücksichtigten Umstände den merkwürdigen Zufall seiner Existenz in seiner Zeit nicht zu erklären vermöchten, so dafs sich seine Existenz zu jeder Zeit mit zwingender Notwendigkeit ergeben müsse.

Man braucht dem guten Glauben des Verfassers nicht zu nahe zu treten, der vorerst alles natürliche Geschehen in Zufall verwandelt, um das Wunder der Welt als ein Wunder zu sehen. Aber ist dazu erst eine Spielerei mit Zahlen erforderlich?

licher und historischer Forschung gegenüber der Behendigkeit unserer Gedanken verleitet immer wieder dazu, ein Sprungbrett aus nur scheinbar solidem Material herzustellen, auf dem man sich von dem Boden empirischer Forschung in die Lüfte der Spekulation erheben möchte. Demgegenüber und im besonderen gegenüber den Versuchen Eduard von Hartmanns, aus minimalen Wahrscheinlichkeiten auf die Wirksamkeit geistiger Ursachen zu schliefsen, ist der Naturforscher wohl zu verstehen, der unwillig erklärt, sein Mikroskop zusammenpacken und auf die Anerkennung für Handlangerei verzichten zu wollen[1]).

Die Besprechung des mathematischen Ausdrucks für die Gewifsheit sei vorbehalten. Nehmen wir wieder an, es werde eine Urne mit weifsen Kugeln gefüllt — 30 an der Zahl, von welchen 10 in bestimmter und 20 in bestimmter anderer Weise gezeichnet sind, und es würde nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, eine Kugel aus jenen 10 oder jenen 20 zu ziehen. Im gewöhnlichen Gebrauche des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zweifeln wir nicht, dafs es verschiedene Grade dieser Art der Aussage giebt; nur vermögen wir sie so wenig objektiv anzugeben, wie wir etwa die verschiedenen Töne einer Farbe durch das Adjektivum in aller Bestimmtheit zu bezeichnen vermöchten. Nur die Grenzen, innerhalb deren wir ein „unwahrscheinlich“ und ein „wahrscheinlich“ feststellen, geben unserer Aussage eine scharfe objektive Bedeutung; wir würden in Verlegenheit geraten, sollten wir einem irgendwie gefertigten Mafsstab eine bestimmte Marke aufdrücken, und müfsten zugeben, dafs gleichsam ein subjektives Residuum bleibt, an dem eine Verständigung mit anderen Menschen scheitert, da auch bei einfachen Verhältnissen eine adäquate Wiedergabe unserer Gedanken schwierig und ihren Inhalt zu erschöpfen häufig unmöglich ist.

Es ist nun überaus schwer, im Besitze und geläufigen Gebrauche eines Begriffes den Standpunkt zu suchen, der seiner Einführung vorherging. Wird hier wirklich ein jeder Verstand sagen müssen: eine zahlenmäfsige Charakteristik der Wahrscheinlichkeiten als möglich vorausgesetzt, werden sich diese für jene beiden Eventualitäten wie die Zahl der von jeder Art vorhandenen Kugeln, d. h. wie 10 : 20, verhalten? Den Dingen können wir sie ja nicht ablauschen, wie wir etwa

---

[1]) Vgl. Oskar Schmidt: Die naturwissenschaftlichen Grundlagen der [illegible]ie des Unbewufsten. Leipzig 1877. S. 6, 13 u. f.

bei 10 Gewichtseinheiten und 20 anderen von demselben Stoffe konstatieren können, dafs ihre Volumina auch das Verhältnis ihrer Gewichte wiedergeben. Und welche Voraussetzungen haben wir in diesem physikalisch so einfachen Falle dem Stoffe aufzuerlegen? Wenn wir nun die Kugeln auf beiden Seiten um je dieselbe Zahl vermehren, warum soll denn dies Verhältnis gestört werden? Scheint nicht vielmehr der Zwang für den Verstand vorzuliegen, dafs ein Zuschufs von gleichviel Kugeln auf jeder Seite das Verhältnis gar nicht zu ändern vermöchte? Ist es wirklich eine Eigentümlichkeit unseres Denkens, einen Fall 13mal so wahrscheinlich zu benennen, als irgend einen andern, oder wird nicht der unbefangene Verstand sagen, dafs er erst dann einen Sinn in diese Aussage zu legen vermag, wenn man sich mit ihm über ihre Grundlagen geeinigt haben wird? Wo sich schon abstufen läfst, empfinden wir doch nicht das Bedürfnis zu multiplizieren, und wir wehren doch dem naiven Philister, wenn er bei einer Temperatur von 20° meint, es sei doppelt so warm als bei 10°.

Jenes Verhältnis setzt voraus, da ja die gewählten beiden Zahlen für alle möglichen im Beispiele eingetreten sind, dafs, wenn auf beiden Seiten die Zahlen im gleichen Verhältnis vermehrt, auch die Wahrscheinlichkeiten unverändert bleiben werden. Will man hierfür den Beweis von LAPLACE gelten lassen, der für zwei Urnen $A$ und $B$, von denen

$$\begin{matrix} A & 4w & 2s \\ B & 2w & 1s \end{matrix}$$

enthält, annimmt, dafs je 2 Kugeln gleicher Farbe durch Fäden verbunden sind, so dafs man aus $A$ mit derselben Chance $2s$ Kugeln zieht, mit welcher man aus $B$ $1s$ entnommen hätte? Aber die Fäden sind ja in Wirklichkeit gar nicht vorhanden. Als eine Behauptung von etwas Thatsächlichen, das gemessen werden soll, hätte sich jenes Verhältnis doch irgendwie zu rechtfertigen. In den gewöhnlichen Darstellungen geht man schnell darüber hinweg, der Versuch LAPLACES beweist aber doch zur Genüge, dafs ihm die Frage Bedenken erregt hat. Wenn wir bei SIGWART, nachdem er unserem Nichtwissen einen andern Charakter zugesprochen hat, je nachdem die Ungewifsheit über 2, 3, 4 .... Möglichkeiten sich erstreckt, das Folgende lesen:

„Gehen wir davon aus, dafs eine dieser Möglichkeiten allein wahr ist, dafs wir aber nicht wissen, welche, so ist die Siche mit der wir die Wahrheit einer bestimmten erwarten dür

die Wahrscheinlichkeit dieser einen, offenbar gröfser, wenn wir nur die Wahl zwischen zweien, als wenn wir die Wahl zwischen drei oder vier Möglichkeiten haben; sie nimmt ab proportional der Zahl der Glieder, ist also in ihrer Gröfse durch den reciproken Wert dieser Zahl ausdrückbar" (Logik II S. 270).

so fragen wir, indem wir uns seinem Standpunkt für einen Augenblick anbequemen: Warum nimmt sie denn proportional ab?, damit wir das sich anschliefsende wichtige „also" auch mitdenken können. Der Satz:

Wenn wir zwei befreundete Magnetpole um 1, 2, 3 ..... Millimeter voneinander entfernen, so nimmt die Anziehung mit jedem Millimeter sichtlich ab; sie nimmt ab proportional der Zahl der Millimeter

enthält einen Irrtum, wie Jedermann weifs, aber er kann dazu dienen, auch jene, auf derselben Argumentation fufsende Behauptung als in der Luft schwebend zu erweisen, wenn wir ihr keine andere Unterlage zu verschaffen wissen, als die Vergröfserung und Verringerung der Wahrscheinlichkeit, die wir dann zugeben, wenn sich die Zahl der Möglichkeiten wirklich, d. h. erkennbar, verändert. Man mag sich nun drehen und wenden, wie man will, so kommt man darüber nicht hinaus, dafs man jene Proportionalität nicht etwa als richtig folgert, sondern dafs man sie als das einfachste Verhalten setzt, und in dieser Bedeutung soll sie auch hier, wenn nicht als zwingend, so doch als natürlich, und, wie sich gezeigt hat, als zweckmäfsig nicht behauptet, sondern dekretiert werden, und man mufs abwarten, ob sie zu Unzuträglichkeiten führen kann.

Es wurde für unser Urteil im Beispiel nicht mehr vorausgesetzt, als das Mitgeteilte. Wir wissen nur, dafs jene Verteilung in der Urne vorliegt mit allen Vorsichtsmafsregeln, die eine Lotterie verlangt. Bis hierher haben wir nur die Null in jener bekannten Weise definiert; wie wir die Wahrscheinlichkeit wirklich messen wollen, wenn es der Gegenstand zuläfst, bleibt noch zu erledigen. Jenes Verhältnis bezieht sich auf 2 Gröfsen, die Wahrscheinlichkeit $x$ eine Kugel der Gruppe (10) und diejenige $y$ der Gruppe (20). Es leuchtet ein, dafs $x$ und $y$ voneinander abhängig sein müssen, denn wenn nach der Wahrscheinlichkeit gefragt wird, irgend eine Kugel zu greifen, sei sie aus der einen oder andern Gruppe, so kann ich das mit voller Gewifsheit sagen, und da auch diese als ein Grad der Wahrscheinlichkeit in die Rechnung mit- werden soll, so wird $x + y$ derjenigen Wahrscheinlich-

keitsgröſse gleichzusetzen sein, die wir für den Grenzfall, eben die Gewiſsheit, bestimmen werden.

Es würde nun gar nichts im Wege stehen, hierfür irgend eine Zahl zu setzen, welche die obere Grenze ein- für allemal zu markieren hätte. Nur würde man weder zu einem allgemeinen Maſse noch zu einer Bestimmung kommen, die unser Urteil in eine andere Form brächte, als die Data unmittelbar angeben, wenn man in unserem Beispiele

$$x + y = 30$$

und also immer die Zahl aller möglichen Fälle der Gewiſsheit entsprechen lassen wollte. Indessen würde nichts im Wege stehen, wie beim Thermometer zu graduieren, 100, 1000 oder sonst eine von den im gewöhnlichen Gebrauch bevorzugten Maſszahlen zu setzen und die Wahrscheinlichkeit prozent- oder promilleweise zu geben. Indessen leistet der Zahlenraum von 0 bis 1 alles, was man verlangen kann, und man ist daher übereingekommen, als Symbol der Gewiſsheit die Einheit zu setzen. Ausgehend von dem richtigen Gedanken, daſs die Prädizierung der Wahrscheinlichkeit verschiedener Grade fähig ist, und daſs diese sich in Fällen wie den vorliegenden zahlenmäſsig bestimmen lassen, hat man sich über die Verwendung der Werte 0 und 1 geeinigt und ist somit angesichts der Gleichungen

$$\frac{x}{y} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

$$x + y = 1$$

in der Lage, auszusagen, daſs

$$x = \frac{10}{30} \quad \text{und} \quad y = \frac{20}{30},$$

die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel der Gruppe (10) also $\frac{1}{3}$, die für die andere Eventualität $= \frac{2}{3}$ zu setzen ist. In der Argumentation hat sich, soviel ich sehe, nur eine Behauptung auszuweisen: Wie kommen wir dazu, das Verhältnis

$$x : y = 10 : 20$$

in dieser Proportion anzusetzen? Denn indem wir von vornherein $x$ und $y$ als arithmetische Gröſsen denken, ist ihre Vereinigung zu einer Summe durchaus gestattet; die Gleichung

$$x + y = 1$$

ist somit lediglich eine Sache der Übereinkunft, nach welcher freilich sich jede Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit zu richten haben wird.

Das Ergreifen einer Kugel aus der einen oder andern Gruppe

ist von einer Unzahl von Einzelursachen abhängig. Habe ich auch im Beispiele einen völlig ausführbaren Versuch beschrieben, so würde in der Wirklichkeit doch die Möglichkeit von tausend und abertausend Momenten zu erwägen sein, die ihn zu verhindern oder zu stören imstande sind. Man müfste aufserordentlich breit werden, wenn der Sinn all dieser Beispiele der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit peinlicher Schärfe aus dem Getriebe der Möglichkeiten, von denen abzusehen ist, herausgeschält werden sollte. Man kann das nur scheinbar abschneiden, indem man anstatt des zukünftigen Ereignisses die vollzogene Thatsache beurteilt. Dort liegt eine unter denselben Bedingungen gezogene Kugel, die ich nicht sehen kann; wie wahrscheinlich ist die eine oder die andere der unterschiedenen Möglichkeiten? Wie man aber das Beispiel modelt, immer verlangt unser Urteil die Rücksichtnahme auf jenen Vorrat von Kugeln nach Zahl und Verteilung. Immer dreht sich die ganze Frage um das eine Urteil: Die Wahrscheinlichkeiten beider Fälle verhalten sich wie die Zahl der Kugeln, welche für jede Art bereitliegen. Jede Veränderung des Verhältnisses beider Arten, so setzen wir fest, soll ein anderes Wahrscheinlichkeitsurteil auslösen, d. h. aber nichts anderes, als: jede Veränderung, die jenes Verhältnis erleidet, würde auch den Grad der Wahrscheinlichkeit in angebbarer Weise modifizieren. Nur jene einfache Proportionalität wird sich auszuweisen haben, denn es liefse sich wohl fragen: Warum nehmt ihr nicht

$$x : y = \varphi(10) : \psi(20),$$

sei es, dafs die Funktionen $\varphi$, $\psi$ auf eine andere Operation als die einfache Setzung hinweisen, sei es, dafs sie Rücksicht nehmen auf besondere Verhältnisse, die unter den verschiedenen Kugeln obwalten und das Ergreifen erschweren, unmöglich machen oder besonders begünstigen. Der zweite Punkt wird durch die Voraussetzungen, welche für alle Kugeln freie Beweglichkeit und keinerlei Begünstigung enthalten, hinreichend abgewiesen. Für den ersten nehmen wir die logische Parallele in Anspruch, nach welcher jede neue Kugel einen für das Urteil gleichwertigen Grund mehr dafür abgiebt, dafs eine Kugel ihrer Art in Wirklichkeit erscheint. Wir berufen uns nicht allein auf die plausible Thatsache, dafs die einfache Proportion auch die nächstliegende und einfachste Setzung, jede andere gekünstelt sei, sondern wir rekurrieren auch auf den Inhalt des gewöhnlichen Begriffs, der die als g l e i c h g e w i c h t i g befundenen Gründe zu zählen vorschreibt. Die logische Subsumption,

auf welche STUMPF die Zählung der günstigen unter den möglichen Fällen verweist, ist die Bedingung der Abzählung überhaupt. Sie ist in unserem Urteil nicht das Wesentliche, sondern die funktionelle Beziehung, welche wir für das Gezählte und unsere Messung in Anspruch nehmen, hat sich auszuweisen. Natürlich können die Kugeln kein irgendwie geartetes Ereignis „herbeiführen", aber dieses selbst hängt von ihrem Vorhandensein und unser Urteil von dem Verhältnis der Fälle in irgend einer Weise ab.

Mit der bloſsen Zählarbeit haben wir noch nichts gemessen, und nicht über das Zählen will man sich verständigen, sondern über ein vernünftiges Maſs, das uns die quantitativen Bestimmungen nur dann gestatten, wenn sie den Anlaſs zu neuer, bedeutungsvoller Anordnung in definierten Einheiten gewähren. Ist das hier der Fall, so dürfen wir auch mit den Gröſsen x und y alle Operationen vornehmen, die ihre Definitionsgleichungen gestatten. Niemand kann aber die Abhängigkeit unseres Urteils von der Zahl und Verteilung der Kugeln leugnen oder in Abrede stellen, daſs man die Wahrscheinlichkeit negieren muſs, wenn Unmögliches behauptet wird, und Jedermann muſs zugeben, daſs die Wahrscheinlichkeit je nach dem Stande der Dinge sich vergröſsern kann, bis sie in die volle Gewiſsheit übergeht. Daſs sie also meſsbar ist, unterliegt keinem Zweifel, wenn lediglich Gröſsenbeziehungen sie beeinflussen. Daſs der Maſsstab es nur mit einem notwendig gegebenen Spielraum zu thun haben kann, ist einleuchtend; seine Einteilung in der konventionellen Weise entspricht dem gesunden Menschenverstand nicht allein, sondern ist auch die zweckmäſsigste, die gewählt werden konnte. Willkürlich an unserer Betrachtung war nur das Beispiel mit seinem Spielraum von 30 Möglichkeiten; nichts hindert, ihn zu erweitern nach dem Bedürfnis einer jeden Aufgabe, wenn nur die Gleichungen ansetzbar sind, die wir beliebig verallgemeinern können, indem wir bei leicht verständlicher Erweiterung jetzt so schreiben:

$$x : y : z : v : \cdots\cdots = a : b : c : d : \cdots\cdots$$
$$x + y + z + v + \cdots\cdots = 1$$

Mathematisch ist hierbei nur die Formulierung des logischen Inhalts, die Wahl des Maſsstabs, und in mathematischer Form werden auch alle Konsequenzen zu ziehen sein, die sich auf solche Fälle beziehen, in denen jene Disjunktion der ohne weiteres übersehbaren Möglichkeiten nicht in einer festen Zahl unmittelbar gegeben ist. Bevor der Versuch gemacht werden soll, jene beiden Definitionsgleichungen

in eine wörtliche Bestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit umzusetzen, wollen wir uns erst mit einem überaus wichtigen Grundbegriffe abfinden, der gewöhnlich an die Spitze der Betrachtungen gestellt wird. Wir sind einen anderen Weg gegangen, der das Konventionelle in den Festsetzungen schärfer hervortreten läfst. Die Disziplin pflegt aus jenem Begriffe ihre Operationen zu folgern, während sie nur nachzuweisen hätte, dafs seine Bedeutung gewahrt bleibt. Natürlich ist der Begriff implicite in unserer Darstellung enthalten, so dafs wir ihn auch als Folgerung aus jenen beiden Gleichungen, aus welchen ja nichts herauszuholen sein wird, was nicht hineingelegt wurde, gewinnen müssen. Setzen wir nämlich:

$$a = b = c = d = \cdots\cdots$$

so ergiebt sich:

$$x : y : z : \cdots\cdots = 1 : 1 : 1 : \cdots\cdots$$

also:

$$x = y = z = \cdots\cdots$$

d. h. die Wahrscheinlichkeiten für jede der Eventualitäten werden einander gleich. Wir kommen auf den Begriff der gleichwahrscheinlichen oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, der gleichmöglichen Fälle. Was ELSAS gegen VON KRIES betont, dafs man die Begriffe möglich und wahrscheinlich scharf auseinanderhalten müsse, ist auch von uns schon berührt worden. Es kann irgend etwas nur möglich sein oder nicht; der absolute Gebrauch des Wortes darf auch unter dem saloppen Ausdruck des gewöhnlichen Lebens, dies sei eher möglich als jenes, nicht getrübt werden. Will man aber den Begriff gleicher Möglichkeit, der implicite den verschiedener Möglichkeit enthält, verwenden, so hat man ihn zu definieren, wie das ja auch gewöhnlich geschieht. Nötig ist die gebrauchswidrige Bezeichnung nicht, da ja gleichmöglich und gleichwahrscheinlich sich völlig decken. Die „cas également possibles“ finden sich nun, wie in allen Schriften, so auch bei LAPLACE, und STUMPF knüpft hier an, um einer neuen Definition die Wege zu bahnen. Wenn nun LAPLACE wirklich definiert hätte, wie STUMPF behauptet: „Gleichmögliche Fälle sind solche, bei denen man keinen Grund hat, die einen für wahrscheinlicher zu halten, als die anderen“, so würden wir das für wenig geschickt halten, aber es hätte einen guten Sinn, wenn man auch STUMPFS elementaren Einwand: „Man darf nicht in die Definition des Wahrscheinlichen den Begriff des Wahrscheinlicheren aufnehmen,“ zugiebt. Das darf man gewifs nicht, aber nicht für das Wahrscheinliche soll eine Definition gegeben, sondern

ein Maſs desselben soll eingeführt werden. Nicht was unter Wahrscheinlichkeit, sondern was unter gleicher Wahrscheinlichkeit einer Anzahl sich ausschlieſsender Fälle zu verstehen ist, lehrt die Definition. Man soll auch arithmetisch Fälle als von gleicher Wahrscheinlichkeit behandeln, bei welchen man logisch keinen Grund hat, einen für wahrscheinlicher zu halten, als den andern. So rückt man bei $N$ solchen Fällen — nach Definition der Gewiſsheit — auf die Division mit $N$ und die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N}$ für jeden Fall — ganz und gar nicht tautologisch — vor. Wie mir scheint, hat aber LAPLACE den lapsus gegen die Regeln der Definition, wenn es einer wäre, gar nicht begangen; der Tadel, wenn er sich aufrecht erhalten läſst, trifft den Übersetzer.

STUMPF ist auf jene Einrede gefaſst und sucht sie in einer Anmerkung zu widerlegen: „Wenn man ‚wahrscheinlicher‘ hier im Sinne des sog. Philosophisch-Wahrscheinlicheren nehmen wollte, wäre nicht geholfen.“ Der philosophischen und der mathematischen, d. h. der nicht (oder nicht genau) meſsbaren und der meſsbaren Wahrscheinlichkeit liege doch ein gemeinsamer Begriff zugrunde. Welcher ist das? Der eine ist ein Kunstbegriff und nach einem Merkmal, das auf einen besonderen Sachverhalt sich stützt, aus dem allgemeinen wohlbekannten Begriff gewonnen. Auszusetzen ist wesentlich die negative Fassung; daſs übrigens eine Messung vorliegen sollte, wenn man eine Begebenheit „nicht wahrscheinlicher“ als eine andere nennt, ist doch wohl zu viel gesagt. Der Vergleich setzt allerdings in unserem Erkenntnisvermögen die Anschauung voraus, aber es ist doch ein Unterschied, ob ich mich so ausdrücke oder „die Wahrscheinlichkeiten gleich groſs setze“.

Es ist nicht wahrscheinlicher, daſs die ganze Welt untergeht, als daſs die Sonne anfängt, sich um die Erde zu drehen. Ist das eine Messung, und werden wir die Wahrscheinlichkeiten gleich groſs setzen? Das eine Urteil ist allerdings so viel wert als das andere, nämlich — nichts. Man kann auf Grund von nur negativen Merkmalen überhaupt nicht vergleichen. Wenden wir uns indessen zu LAPLACE.

Die Stelle, auf welche STUMPF verweist, lautet in dem Original der „Théorie analytique des probabilités“ von 1814 wörtlich:

> „La probabilité est relative en partie à cette ignorance et en partie à nos connaissances. Nous savons que sur trois ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doit arriver; mais rien

ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres. Dans cet état d'indécision il nous est impossible de prononcer avec certitude sur leur arrivée. Il est cependant probable qu'un de ces événemens pris a volonté, n'arrivera pas; parce que nous voyons plusieurs cas également possibles qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

La théorie des hasards consiste à réduire tous les événemens du même genre, à un certain nombres de cas également possibles, c'est à dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence. . . . . ."

An dieser Stelle ist noch besonders interessant, dafs sie von drei oder einer gröfseren Zahl von Ereignissen spricht; bei der einfachen Alternative scheint LAPLACE sich schon auf die Wertung im gewöhnlichen Gebrauche zu stützen. Mit wenig Glück ist nun von STUMPF die Definition der „gleichmöglichen Fälle", die bei LAPLACE nur im Zusammenhange gegeben wird, durch eine andere ersetzt worden: „Gleich möglich sind Fälle, in Bezug auf welche wir uns in gleicher Unwissenheit befinden." Nimmt man diese Definition beim Wort, so kommt man zu den wunderbarsten Konsequenzen. Die Konkurrenz, die in der von STUMPF bemängelten Fassung doch noch in der Bemerkung, dafs ein Fall nicht für wahrscheinlicher zu halten sei, als der andere, wenn auch undeutlich, anzunehmen vorgeschrieben wird, dafs also die Fälle sich notwendig auszuschliefsen haben, wird mit einem Male über Bord geworfen. Auch wenn man annimmt, dafs STUMPF durch die Worte: „die sog. gleichmöglichen Fälle, die in den Begriff der Wahrscheinlichkeit eingehen" sich die notwendige Begrenzung innerhalb einer abgeschlossenen Zahl von Möglichkeiten vorbehalten hatte, wäre ihm der Vorwurf unzureichender Bestimmtheit nicht zu ersparen. Die Meinung von LAPLACE wird durch seine eigenen Worte: „. . . c'est à dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence" durchaus nicht vollkommen ausgedrückt; es hätte ihm selbst ja sonst gefallen, sich auf dieselben zu beschränken. Giebt man aber die STUMPFsche Definition etwa in der Fassung:

Gleich möglich sind Fälle, von denen nur einer wahr sein kann und mufs, in Bezug auf welche wir uns aber in gleicher Unwissenheit befinden

zu, adoptiert man ferner, dafs „gleichmögliche Fälle immer auch gleich wahrscheinlich sind", so sehe ich nicht, wie man dem von v. KRIES citierten Nonsens eines englischen Logikers ausweichen

wollte: „If $A$ and $C$ are wholly unknown things, we have no reason to believe that $A$ is $C$ rather than that it is not $C$; the antecedent probability is then $\frac{1}{2}$." In diesem Beispiele ist die Bedingung der Unwissenheit in absolutem Mafse erfüllt:

> „Und da die Unwissenheit nur dann ihrem Mafse nach gleich gesetzt werden kann, wenn wir absolut nichts darüber wissen, welcher von den unterscheidbaren Fällen eintreten wird, so können wir noch bestimmter diese Erklärung dafür einsetzen" (STUMPF S. 40).

Wenn also STUMPF zuerst die „Gleichmöglichkeit" erkannt wissen will, so wird in dem Beispiel des Engländers diese Bedingung wohl erfüllt sein. Wir wollen den Mifsverstand des Exemplums etwas mildern. Vor zwei leidenschaftlich dem Wetten ergebenen Personen steht eine Urne. Sie sind beide ehrlich; keiner hat eine Ahnung von ihrem Inhalt. „Ich wette, dafs sich keine weifse Kugel darin befindet." Ob der Andere sich wohl entschliefsen würde, dagegen zu wetten? Er wird sich hüten, al pari zu halten, wenn nicht etwa bei den Spielern die Logik ungleich verteilt sein sollte. Bei beiden ist die „Unwissenheit" in Bezug auf die beiden möglichen Fälle völlig dieselbe. Eine weifse Kugel mufs entweder darin sein, oder sie ist es nicht; ein Drittes giebt es nicht. Das „rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres" enthielt denn doch etwas mehr als die absolute Unwissenheit, auf die man keinerlei richtigen Gedanken, noch weniger aber ein praktisches Verhalten zu gründen imstande ist. Die negativen Argumente sind intrikat, wie schon das jokose Beispiel:

Keine Katze hat 2 Schwänze
Eine Katze „ 1 Schwanz
―――――――――
Also hat eine Katze 3 Schwänze

zur Genüge lehrt.

Die Betonung dessen, was man nicht wissen dürfe, wie sie in den Aufgaben geboten ist, und wie die Wetten sie immer verlangen, hat der ganzen Theorie schlechte Früchte getragen. Der „mangelnde Grund" für ein bestimmtes Urteil s t e l l t die Aufgabe, aber er l ö s t sie nicht; auch in dem bescheidenen Sinne des Wahrscheinlichkeitsurteils kann er, da er selbst nichts ist, auch nichts leisten. Die objektive Möglichkeit sagen wir aus, wenn uns die Wirklichkeit des Gegenstandes in der Erfahrung fehlt, aber auch sie hat ihre Stütze in der Erfahrung selbst, im positiven Wissen.

Dafs LAPLACE jene absolut gleiche Unwissenheit als notwendige Bedingung vorgeschwebt hätte, darf man billig bezweifeln, obwohl seine Wendung: „La probabilité est relative en partie à cette ignorance et en partie à nos connaissances" ja keinen Zweifel darüber läfst, dafs er die unwesentlichen und überflüssigen Worte „à cette ignorance", die sich auf die wirklichen Ursachen (véritables causes), von denen er vorher spricht, beziehen, für wichtig gehalten hat. Die Nivellierung, wie sie in der Wette durch die gleiche Unwissenheit bewirkt wird, ist keine Maxime, welche der Verstand in der Wissenschaft adoptieren darf, und die Schemata der Disziplin lassen sehr wohl die Behauptung zu, dafs sie, wie andere Aufgaben auch, nur positive Bestimmungsstücke geben wollen.

Wir wollen indes zu unserem Beispiel zurückkehren, um seine Bedeutung für den Begriff festzustellen und auch die Untersuchung auf weitere Kontroversen zu erstrecken, die auf keinem Gebiet mehr als auf dem unserer Disziplin angetroffen werden.

In unserem Kugelbeispiele war vorausgesetzt, dafs der Zug einer jeden Kugel möglich war. Der Einfachheit wegen hatten wir die Vorsichtsmafsregeln vorgeschrieben, die bei Lotterien üblich sind. Daran zweifelt ja Niemand, dafs alle diese Beispiele die gröfste Analogie mit den Konstruktionen bieten, mit welchen wir geometrische Untersuchungen zu versehen pflegen. Für diese wie für jene gilt, dafs, wie hier die räumlichen Darstellungen sich nie absolut mit dem decken, was der geometrische Begriff verlangt — es giebt kein rechtwinkliges Dreiecke aufser im Begriffe —, so auch dort jene Anordnungen den Anforderungen nie vollkommen entsprechen, die von einer mathematischen Gleichheit verlangt werden. Hat man viele Kugeln in der Urne, so können die obenliegenden leichter erreicht werden; verteilen sich die Kugeln in einer Schicht auf einen grofsen Raum, so ist diese bequemer zu greifen, als jene. Wir wissen also, dafs in Wirklichkeit Begünstigungen vorhanden sind. Durch Schütteln pflegt man diese Verhältnisse auszugleichen, ohne darum den überall zugrundeliegenden Gedanken einer gleichen Wahrscheinlichkeit völlig zu erfüllen. Gleichwohl ist unsere Annahme in allen diesen Beispielen, dafs keiner der Fälle in dem vorliegenden Thatbestand einen Vorzug vor dem andern habe, dafs weder in dem Vorgang der Anordnung noch in dem der Ausführung, sei es durch Ziehen oder irgend eine andere mechanische Ursache, ein Moment in Frage kommen könnte, das einen Fall eher verwirklicht, als einen andern. Dafs ein bestimmter Fall notwendig eintreten

mufs, dafs die ganze Kausalreihe, wenn sie sich in alle ihre Einzelheiten verfolgen liefse, mit unerbittlichem Zwange im individuellen Geschehen eben auf ihn sich richtet, berechtigt durchaus nicht, unsere Annahme jener Indifferenz lediglich auf unsere Unkenntnis zu stützen. Wir müssen wissen, dafs kein sachlicher Grund gegeben ist, der für die Notwendigkeit des einen Falles oder einiger mit Ausschlufs aller übrigen sich geltend machen läfst; das präzisiert die Aufgabe nicht allein, sondern macht sie erst möglich. Vom Würfelspiel heifst es bei Elsas[1]): „Wir urteilen, dafs keine der 6 Würfelseiten durch beständig wirkende Ursachen begünstigt wird, und auch weder durch den Werfenden noch durch den Wurf eine Begünstigung möglich ist; wir bezeichnen in diesem und in keinerlei mathematischem Sinne die 6 möglichen Fälle als gleich möglich."

Darauf antwortet Stumpf (S. 54): „Im Gegenteil! Ich zweifle gar nicht, dafs eine der 6 Seiten durch beständig wirkende Ursachen begünstigt ist. Ich weifs nur nicht, welche, und habe nicht den geringsten Anhaltspunkt für eine von ihnen. Daher $\frac{1}{6}$." Wenn so der mathematisch-philosophische Naturforscher und der mathematisch geschulte Philosoph scheinbar die entgegengesetzten Ansichten vertreten, so ist es wohl geboten, nach Klarheit zu suchen.

Was heifst begünstigen? Entkleidet man diesen Begriff des Beigeschmacks, der ihm aus der Sphäre des menschlichen Thuns anhaftet, sieht man davon ab, dafs an ein Subjekt nicht gedacht wird, das Gunst bezeigen könnte, so sagt Stumpf: „Ich zweifle nicht, dafs beständig wirkende Ursachen eine Seite des Würfels zur Erscheinung bringen werden." Also eine Seite mufs notwendig fallen, aber daran zweifelt auch Elsas nicht, dem der Kantsche Satz: „Alles Wirkliche ist hypothetisch notwendig" gewifs nicht fremd war. Von den Unvollkommenheiten des Würfels abgesehen setzen wir als Spielregel fest, was Fries (S. 20) so ausspricht:

> „Der Wurf gilt nicht, wenn der Würfel zerbricht oder nicht eine seiner Seiten gerade oben zeigt; der Würfel taugt nicht, wenn er leichter die eine Seite als die andere zeigt; der Wurf ist nicht ehrlich, wenn er mit der Geschicklichkeit geführt wird, eine beabsichtigte Seite oben zu bringen. Unter diesen Regeln bleiben dann die sechs Fälle, dafs eine der Seiten oben fällt, die einzigen möglichen, und für jeden derselben sind die Bedingungen des Eintreffens die nämlichen."

---

[1]) Philosophische Monatshefte XXV, S. 567.

Das Spiel hat den Wahrscheinlichkeitsbegriff bisher überall illustrieren müssen. Sein Erfolg ist nicht berechenbar, aber seine positiven Daten geben das Material zu zahlenmäſsigen Disjunktionen, nach welchen wir uns nur dann richten können, wenn uns ganz und gar kein Zweifel über die objektiv und subjektiv unparteiische Verteilung — wenn dieser Ausdruck verstattet ist — beigeht. Wenn wir nun Zweifel hegen über die Eigenschaften des Würfels oder die Ehrlichkeit der Spieler? Ist dann die Wahrscheinlichkeit auch noch $\frac{1}{6}$?

Stumpf meint, die Wahrscheinlichkeit, mit einem gefälschten Würfel eine bestimmte Seite zu werfen, ist für den, der seine Konstruktion kennt, natürlich nicht $\frac{1}{6}$, aber für den, der sie nicht kennt, muſs sie nach seiner Ansicht so und nicht anders bestimmt werden. Wenn er nun allmählich zur Erkenntnis kommt, daſs der Würfel gefälscht war, ist dann sein Urteil richtig gewesen oder nicht? Er hat zuvor ganz und gar nichts von der Fälschung gewuſst; also war er nach Stumpf zu der Wertung $\frac{1}{6}$ berechtigt. Aber wodurch wird denn nachher sein Urteil umgestoſsen? Doch nur, weil falsche Voraussetzungen gemacht worden sind. Ein Urteil kann sehr wohl formal richtig, aber sein Inhalt unzutreffend sein. Wir haben uns darüber schon an anderer Stelle verbreitet. Aber dasselbe Urteil kann nicht von demselben Objekt auf Grund verschiedener Voraussetzungen zu stande kommen. Setze ich einmal voraus, daſs der Würfel den Anforderungen entspricht, die das Spiel verlangt, und ein anderes Mal, daſs ich nicht weiſs, ob diese Voraussetzung zutreffend ist, oder daſs sie es nicht ist, so unterscheiden sich die Annahmen wie Sichergewuſstes von bloſs Möglichem, die Urteilsmaterie ist eine fundamental andere, und ich kann nicht beidemal dasselbe aussagen: die Wahrscheinlichkeit für eine Seite ist $\frac{1}{6}$. Ein Würfel, wie er auch beschaffen ist, läſst 6 Möglichkeiten zu, über deren Verwirklichung ich mich immer in gleicher Unwissenheit befinde, wenn ich ihn nicht kenne. Weshalb setzt man da immer einen Würfel von ganz bestimmter Beschaffenheit voraus, anstatt zu sagen: Gegeben ist ein Würfel, den ich nicht kenne, mag er sonst beschaffen sein, wie er will? Wenn man nun mit Stumpf die Wahrscheinlichkeit dafür, daſs ein vorliegendes Dreieck absolut genau rechtwinklig ist, $= \frac{1}{\infty}$ setzt; wenn ferner die Wahrscheinlichkeit einer Seite bei einem „absolut genauen“ Würfel $\frac{1}{6}$ ist; wenn ferner irgendwo ein Würfel von 6 Seiten ist, von dem

ich gar nichts weifs: wer hindert mich, zu sagen: Die Wahrscheinlichkeit, dafs dieser Würfel auch nur im Sinne des Spiels genau ist, ist nahezu = 0; also ist es höchst unwahrscheinlich, dafs die Wahrscheinlichkeit, mit ihm eine bestimmte Seite zu werfen, $\frac{1}{6}$ ist? Den Gegensatz subjektiver und objektiver Gültigkeit gestatten wir nur in gewissem Sinne; die Relativität, der wir mit dem Stande unserer Kenntnis ausgesetzt sind, geben wir zu, und „objektiv gültig“ und „relativ gültig“ kann man in der Wissenschaft immer nebeneinander gebrauchen, ausgenommen in der formalen Logik und der Mathematik, also ausgenommen auch in unseren Beispielen, die auf Grund fester Voraussetzungen ein exaktes Urteil abgeben wollen.

„Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist etwas durchaus Festes, eine Funktion der Urteilsmaterie“ heifst es bei Stumpf, und auch für einen „nicht nach der Ausdehnung, sondern nur nach der Kraft des Denkens“ unendlichen Verstand soll sie gelten.

Ob dieser in der Tiefendimension uneingeschränkte Verstand den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit hätte, weifs ich nicht. Er müfste sich ihn definieren oder die in den Voraussetzungen der Definition enthaltenen logischen Momente völlig adoptieren. Jene Meinungsverschiedenheit zwischen Elsas und Stumpf, sofern sie sich auf den Quotienten $\frac{1}{6}$ erstreckt, ist aber lediglich eine Definitionsfrage. Die Aussage $\frac{1}{6}$ für die Wahrscheinlichkeit einer Würfelseite ist so wenig auf dem einen als auf dem andern Standpunkte mit einem Zwange, der in den Objekten und dem Denken liegt, im Verstande ausgelöst worden. Ohne die zweifel- und einwandfreie Verständigung über die Prädizierung $\frac{1}{6}$ ist diese selbst so sinnlos, wie es die Quadratwurzel aus $-1$ ist, sofern ich den Begriff der Wurzel nicht durch die Definition fixiere.

Der mathematische Schematismus hat sich an ein bestimmtes Beispiel angeschlossen; es wird nötig sein, die Bedeutung desselben in allgemeinerer Weise festzulegen, ihn durch eine wörtliche Bestimmung zu ergänzen. Welche Aufgabe kann nun in unserem Falle die Definition haben? Diese Frage legt sich auch Stumpf vor, und wir müssen ihm völlig zustimmen, wenn er uns von der Willkür einer persönlichen, diktatorischen Setzung frei halten will, der wir ja in die Konsequenzen nicht zu folgen gezwungen werden können, weil es uns nicht beliebt, oder wir den Zweck nicht einzusehen vermöchten. Unsere Definition, die, weil sie nicht rein mathematisch ist, der „Exposition“ bedarf, wie Kant sich ausdrückt, hat festzustellen, was in der Wissenschaft der Begriff bedeutet nach

den historischen Gegebenheiten, und darf auch der Aufgabe nicht aus dem Wege gehen, diese Bedeutung zu rektifizieren, wenn der gesunde Menschenverstand oder irgend welche berechtigten Interessen das verlangen. Die Anknüpfung an LAPLACE, den hervorragenden Klassiker der Wahrscheinlichkeitstheorie, ist eine durchaus sachgemäfse, denn wo der grofse Mann nach der allgemeinen heutigen Meinung geirrt hat, sind weniger die ersten Grundlagen, als die Anwendungen der französischen Schule überhaupt in Frage. Wenn ein so eingeschworener Empirist wie JOHN STUART MILL[1]), sich zu den Fundamenten der auf aprioristischem Boden erwachsenen Disziplin bekehrt, so darf man von vornherein annehmen, dafs sie sehr wahrscheinlich unwiderleglich sind. Ein solches Argument hat natürlich nicht mitzureden.

STUMPFS Deutung der „gleich möglichen Fälle“ ist im Widerspruch mit der Lehre von LAPLACE. Gleichviel, ob man die Aussage auf Vergangenes, Gegenwärtiges oder Zukünftiges bezieht, ist man über die Wahrheit eines Falles, von dem man nichts weifs — ob dieser oder irgend ein anderer wahr ist, giebt zur Fragestellung den Anlafs —, völlig in derselben Unwissenheit oder Unentschiedenheit, wie LAPLACE sich ausdrückt, es sei denn, dafs man sich durch Vergleichung der gleichwertigen Gründe dafür und dawider eine Ansicht in der Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung bilden kann. Über das Dasein, die Wahrheit des besonderen Falles, der in Frage steht, sagt die Disjunktion gar nichts aus. Auch wenn $10^6$ weifse Kugeln und 1 schwarze in der Urne sind, befinden wir uns über den Zug einer *w* oder einer *s* Kugel, der geschehen ist, geschieht oder geschehen soll, in gleicher Unwissenheit, es sei denn, dafs wir auf Grund der positiven Kenntnis, dafs nichts anderes dem Zuge der einen oder andern Kugel im Wege steht, als das Verhältnis ihrer Zahl, eben dieses allein unser Urteil beeinflussen lassen. Das disjunktive Urteil sagt nur: „Die gezogene Kugel ist eine von $10^6$ *w* oder 1 *s* Kugel.“ Ob sie *w* oder *s* ist, sagt es nicht. Sehr möglich, wenn ich gar nichts weiter von den Kugeln weifs, dafs die $10^6$ *w* Kugeln so befestigt sind, dafs sie gar nicht erscheinen können. Die Disjunktion kann für die Wahrscheinlichkeit gar kein Mafs geben, wenn darüber nicht positive Bestimmungen getroffen sind, von denen ich etwas weifs.

In den g l e i c h wahrscheinlichen Fällen der gewöhnlichen Bei-

---

[1]) Logik II. Übersetzung von J. Schiel. Braunschweig 1863. S. 67.

spiele soll aber ausdrücklich eine scharfe Übereinstimmung der einzelnen Fälle für unser Urteil gesetzt werden, die schon durch die Vermutung von Begünstigungen irgend welcher Art getrübt werden könnte. Alle Bestimmungsstücke für das Urteil werden für die Abzählung in den Voraussetzungen gewissermaſsen präpariert, und nicht nur von den toten Objekten gilt das, sondern wo Spieler in die Aufgabe mit einbezogen werden, tritt sofort die Annahme auf, daſs sie gleich gut spielen, oder es wird gar ihre Kunst durch ein exaktes Zahlenverhältnis gewertet. Es fragt sich nun, ob alle diese Beispiele den Begriff nach seiner Bedeutung vollkommen kennzeichnen, oder ob er noch Merkmale hat, die uns in der Beschränkung eben auf sie entgehen, oder solche, die ihn mit einem gleichgültigen Plus, also mit unwesentlichen Merkmalen, unnötig belasten. Das disjunktive Urteil findet sich immer, wo von Wahrscheinlichkeit die Rede ist; daſs es nicht auch umgekehrt so ist, wurde bereits erwähnt. Insofern glauben wir nicht, daſs die Lehre vom disjunktiven Urteil und die Wahrscheinlichkeitslehre je zur Verschmelzung gelangen können. Jenes ist die rein logische Form, und das Wahrscheinlichkeitsurteil geht über diese, welchen Inhalt wir ihr geben, immer hinaus. Aber andererseits ist klar, daſs allen jenen Beispielen Eigentümlichkeiten zukommen, die wir sehr wohl in eine allgemeine Form würden auflösen können. Alle jene Kugeln, Würfel, Karten sind ja ein Beiwerk, für das sich ein gemeinsames allgemeineres Anschauungsmittel finden muſs. Nebenbei bemerkt ist der Umstand, daſs alle jene Beispiele auf ein zukünftiges Geschehen hinzuweisen pflegen, völlig gleichgültig. Daſs wir alle Wahrscheinlichkeitsurteile, gleichviel, auf welche Objekte sie sich beziehen, gleichviel, ob sie zeitlich oder ihrem Gegenstande nach verschieden sind, schieſslich, wie Poisson behauptet, uns so entstanden denken können, wie es beim Urnen- und Kugelbeispiel von uns gefällt wird, macht es weder notwendig noch wünschenswert, die alte, an eben diese Beispiele anknüpfende Definition, welche von „Ereignissen" spricht und günstige und ungünstige Fälle unterscheidet, aufrecht zu erhalten. Die Definition von Laplace, nach welcher

> „das Verhältnis der Zahl günstiger Fälle zur Zahl aller möglichen"

das Maſs der Wahrscheinlichkeit abgiebt, kann allerdings bei entsprechender Interpretation nicht zu falschen Folgerungen führen;

gleichwohl mag es zweckmäfsig sein, die Bestimmung so zu fassen, dafs sie ein Minimum von Auslegung nötig macht.

Aber das kann nur von formeller Bedeutung sein.

Jenen Versuch, die bisherigen Hülfsmittel der Schule durch ein allgemeines zu ersetzen, hat LANGE (Logische Studien) unternommen. Wie schon gesagt (S. 40), geht LANGE, wie LOTZE und SIGWART, vom disjunktiven Urteil aus. Gleich hier sei bemerkt, dafs alle drei Philosophen in wesentlichen Punkten nicht voneinander abweichen; wenigstens spricht LANGE in diesem Sinne von LOTZE und SIGWART, und die Bemerkung SIGWARTS im zweiten Bande der Logik (S. 270) über LANGE würde wohl ohne das Bewufstsein einer Übereinstimmung im allgemeinen unterblieben sein. LANGE versucht das disjunktive Urteil:

„$S$ ist entweder $p_1$ oder $p_2$ ..... oder $p_n$“

durch räumliche Bilder in einer Weise zu veranschaulichen, die sich als eine nicht unwesentliche Erweiterung des Gebrauchs räumlicher Anschauungen zur Erläuterung logischer Sätze erweist.

Es kann keinem Zweifel unterliegen, dafs auch in rein mathematischen Disziplinen, die auf Unabhängigkeit von räumlicher Anschauung Anspruch machen, in letzter Linie das räumliche Bild Verständnis und Evidenz vermittelt. Die Begriffe „gröfser“ und „kleiner“ sind ihrem Ursprunge nach geometrisch; der arithmetische Begriff $\sqrt{-1}$ und seine Bedeutung sind durch die GAUSSsche räumliche Symbolisierung der Erkenntnis wesentlich näher gebracht worden; das Grundgesetz der Algebra, wonach eine jede algebraische Gleichung mindestens eine und daher so viele Wurzeln habe, als ihr Grad Einheiten, ist am leichtesten aus geometrischen Betrachtungen ableitbar, und selbst die Zahlentheorie giebt ihren Sätzen eine überaus einleuchtende Demonstration, wenn es ihr, wie beim EISENSTEINschen Beweis des Reciprocitätsgesetzes, gelingt, den Inhalt in eine geometrische Form zu kleiden. Gleichviel, ob man LANGE zugeben kann, dafs in dem Anschauungsbilde, mit welchem wir logische Sätze begleiten, für uns das eigentliche Überzeugende liegt, ob nicht Objektives und Subjektives nebeneinander behauptet wird, wenn er sagt:

„Dafs das Ganze gröfser ist, als der Teil, dafs Gleiches zu Gleichem hinzugefügt Gleiches giebt, sehen wir, und deshalb glauben wir es. Jedes beliebige Beispiel schliefst die Allgemeinheit in sich, weil wir es sofort beweglich sehen und die Überzeugung gewinnen, dafs es in jeder denkbaren Veränderung von Form und Gröfse

des Angeschauten sich gleich verhalten werde. Ebenso aber sehen wir an einem Raumbilde irgend welcher Art, sei es in einem konkreten Falle, sei es in einem bloſsen Linienschema, daſs ich nicht dasselbe von demselben Gegenstande bejahen und verneinen kann. Das einzelne Bild wird sofort typisch, allein ohne Bild überhaupt bleibt mir die Formel leer, und ich gewinne weder die Überzeugung von ihrer unbedingten Gültigkeit noch auch nur eine wirkliche Einsicht in ihren Sinn."

gleichviel also, ob man mit Lange eine so wichtige, fast absolute Rolle der Anschaulichkeit und Überzeugung durch räumliche Bilder zugesteht oder nicht, wird man nicht umhin können, der Symbolisierung durch geometrische Gebilde die Fähigkeit zuzusprechen, Unwesentliches von den sonst üblichen Darstellungen fernzuhalten, Ungereimtes leicht nachzuweisen und auch eine leicht gangbare Brücke für das Verständnis zu schlagen, wo die Übersicht nach der Natur des Gegenstandes schwierig erscheint.

Lange veranschaulicht nun jedes disjunktive Urteil durch zwei Rechtecke in dieser Weise:

$P$ — $\times S$      $P$ — $p_1 \mid p_2 \mid p_3 \mid \ldots$

welche besagen sollen, daſs $S$ in $P$ eine Stelle hat, die durch ein Kreuzchen an beliebigem Orte mit dem Vorbehalte markiert wird, daſs $S$ in $P$ beweglich zu denken ist oder, mit anderen Worten, in den Raum, welcher den Umfang von $P$ darstellt, hineingehört. Indem er nun in diesem Falle gleicher Rechtecke für den Umfang der dem $P$ untergeordneten Begriffe ihre völlig gleichberechtigte logische Koordination zur Darstellung bringt, zeigt sich sogleich, daſs die Disjunktion auch dann richtig bleibt, wenn mehrere der gleichen Rechtecke zusammengezogen, der Umfang der dem $P$ zugehörigen Unterbegriffe verändert wird, etwa so:

$P$ — $p'_1 \mid p'_2 \mid p'_3 \mid p'_4 \mid p'_5$

An dies Bild knüpft er sodann die Bemerkung, daſs die Häufigkeit, mit welcher man einen Fall der Klasse $p'_1$ erwarten darf, sich zu derjenigen von $p'_2$ oder $p'_3 \cdots\cdots$ verhält wie die Ausdehnung der betreffenden Felder. Man habe dann keine reine Koordination mehr,

keine lobenswerte Einteilung, allein das Verhältnis des Gegensatzes zwischen je zwei beliebigen Gliedern oder je einem und der Summe aller übrigen oder zwischen zwei beliebigen Gruppen bleibe durchaus dasselbe. Auf Beispiele, die er dazu giebt, möchte bei der Einfachheit der ganzen Betrachtung verzichtet werden können. Wir haben hieran nun folgendes auszusetzen. Indem wir eine logisch „reine Koordination" mit lauter Begriffen gleichen Umfangs symbolisieren, haben wir eine mathematische Gleichheit weder behauptet noch erwiesen. Der logische Umfang und der mathematische brauchen sich gar nicht zu decken. Wenn ich mehrere der Begriffe $p_1$, $p_2$ .... unter einen Hut bringe, so wächst zwar der Umfang, aber daſs er im Verhältnisse der zusammengelegten Begriffe zunehmen müſste, wird Niemand allgemein behaupten. Die chemischen Elemente sind nach dem Stande unserer heutigen Kenntnisse Glieder einer guten logischen Koordination; wer würde, auch wenn er gar nichts von der verschiedenen Seltenheit wüſste, nicht behaupten, sondern nur als das Wahrscheinlichste annehmen, daſs sie alle gleichen Umfang haben? Die Wahrscheinlichkeit, daſs ein uns vorgelegter regelmäſsiger Körper, von dem wir gar nichts wissen — daſs er nicht mehr als 20 Seiten hat, liegt schon im Begriffe —, ein Tetraeder ist, sei $\frac{1}{5}$, sagt Stumpf. Hier ist völlige Übereinstimmung mit Lange, der gar nicht, wie Stumpf meint, eine „physische" Gleichheit der möglichen Fälle behauptet und verlangt hat. Ein regelmäſsiger Körper ist entweder ein Tetraeder, Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder oder ein Ikosaeder; also ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$. Sollte man, nach der mathematischen Wahrscheinlichkeit einer „Urteilsmaterie" befragt, wirklich immer imstande sein, eine Antwort zu geben? Die Unwissenheit wird sich ja im schlimmsten Falle immer konstatieren lassen. Ein bekannter Physiker pflegte die Prüflinge im Examen zu fragen: „Was halte ich in meiner Hand?" — diese auf dem Rücken verbergend. Eine Linse, meinte der eine; ein Thermometer, der andere. Der dritte sagte schlichtweg: „Ich weiſs es nicht, denn Sie sind nicht durchsichtig." Die Nutzanwendung ergiebt sich von selbst.

Allerdings kommt Lange bei der Frage nach der räumlichen Abbildung für das Würfelspiel in Zweifel, und völlig inkonsequent sucht er hier den logischen Umfang für die einzelnen Fälle aus der Natur des Würfels mit dem empirischen Umfang ins Gleichgewicht zu bringen, wie er sich ergeben würde, wenn der Würfel wirklich in einer groſsen Zahl von Fällen erprobt worden wäre. Eine solche

Probe verschiebt seinen ganzen Standpunkt, während auch für uns das wirkliche Geschehen ganz gleichgültig ist; alles liegt in den Voraussetzungen. Ich weifs nicht, woraus STUMPF auf die Forderung einer „physischen Gleichheit" der möglichen Fälle bei LANGE schliefst; die Worte: „Die Möglichkeiten des disjunktiven Urteils verwandeln sich in Wahrscheinlichkeiten, sobald ihnen eine bestimmte Gröfse beigelegt wird, welche abhängt von dem Verhältnisse des Umfangs der einzelnen Möglichkeiten zur Summe aller Möglichkeiten," können angesichts der Beispiele und der ganzen Entwicklung, die ein Kapitel der formalen Logik geben will, nur im Sinne logischer Quantitäten gedeutet werden. Die Gleichheit in der räumlichen Darstellung weist nur auf die Gleichheit im Rang für die koordinierten Begriffe $p_1$ $p_2$ $p_3$ .... hin. Soll in einem Wahrscheinlichkeitsurteil die von LANGE angeführte Disjunktion: „Ein Mensch kann entweder Europäer oder Asiate oder Afrikaner oder Amerikaner oder Australier sein" verwandt werden, so hätte im räumlichen Bild sofort die Zahl der Einwohner sich geltend machen müssen. Davon findet sich bei LANGE kein Wort. Die LANGEschen Bilder sind gleichwohl ein vorzügliches Mittel, die Sätze der Wahrscheinlichkeitslehre, sofern sie nur abzählen wollen, zu veranschaulichen; man sollte sie in der Schule benützen, denn der Mathematiker wird ihrer schwerlich bedürfen. Nur mufs man sich hüten, sie so zu verwenden, dafs eine Kongruenz im Bilde sich auf Gröfsenverhältnisse erstreckt, von denen in Wirklichkeit aus mangelnder Kenntnis weder mathematische Gleichheit noch Ungleichheit auszusagen wäre. Sowenig sonst jenen beiden Gleichungen, die einen Sachverhalt mathematisch beschreiben sollen, ein adäquates Objekt entsprechen würde, ebensowenig würden wir auch nur symbolisch die Bilder als ihrem Gegenstande gemäfs deuten können. LANGE hat es überall nur mit logischen Formen zu thun und überläfst es der Anwendung, zu prüfen, ob sie richtig ist. Was er leistet, ist lediglich eine Zurückführung der Kombination auf logische Schemata, deren Illustration das Wesen des Wahrscheinlichkeitsurteils weder trifft noch treffen kann. In der reinen Logik ist es nicht gegründet.

Auch bei LOTZES Darstellung tritt die Anforderung einer scharfen m a t h e m a t i s c h e n Disjunktion, wie wir uns ausdrücken möchten, nicht klar heraus, obwohl die von uns (S. 79) citierte Stelle in ihrem Sinne ausgelegt werden könnte. Er beschränkt seine Darstellung „n a m e n t l i c h in Bezug auf zukünftige Ereignisse"; und wie aus diesen und den bereits oben (S. 54) angeführten Worten hervorgehen

möchte, wird ihm STUMPF wohl nicht ganz gerecht, wenn er von ihm sagt, daſs er die Beschränkung des Begriffs auf zukünftige Begebenheiten ausdrücklich sanktioniert habe. Ohne uns auf diese Frage näher einzulassen, wollen wir nur auf eine andere Seite seiner überaus lichtvollen Darstellung verweisen. LOTZE ist in neuerer Zeit der erste Logiker gewesen, der Kritik geübt und zur Kritik aufgefordert hat. Bei schärferem Zusehen wird man auch in manchen vorsichtigen statistischen Publikationen seinen Einfluſs gewahren können. Die Gefahr einer falschen Auffassung der koordinierten Fälle, die Irrtümer, die immer wieder in der Gestalt unglücklicher Disjunktionen, zumal unter Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, uns begegnen, veranlassen ihn zu der folgenden, sehr bestimmten Warnung: „Geben wir dem disjunktiven Urteil willkürlich die Gestalt: wenn $B$ gilt, so gilt entweder $f^1$ oder $F^m$, so daſs wir unter $F^m$ alle die $m$ oder $n-1$ Folgen $f$ verstehen, welche nicht $f^1$ sind, so sind $f^1$ und $F^m$ nicht mehr koordinierte Glieder; die Wahrscheinlichkeit des ersten zwar bleibt $\frac{1}{n}$, aber die des zweiten ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Elementarfälle, die in diesen Ausdruck vereinigt gedacht werden, also $= \frac{n-1}{n}$." Auch wenn man nicht wüſste, daſs LOTZE ein sehr gut versierter Mathematiker war, würde man nicht bezweifeln, daſs unter Elementarfällen nur solche gemeint sein können, die eine wirkliche Zählung zulassen. Dieser exakten Zählung sind wir freilich überhoben, wenn wir mit LANGE, STUMPF und auch mit SIGWART annehmen, daſs uns in letzter Instanz, wenn wir gar nichts wissen, schon die logische Disjunktion berechtige, eine mathematische Wahrscheinlichkeit auszusagen. Selbst wenn wir nicht in einer Zeit lebten, in der die mathematische Gewissenhaftigkeit und Schärfe auf eigener Domäne eine Polizei ausübte, wie sie keiner andern Wissenschaft eigen ist — man braucht nur an die Namen WEIERSTRASS, KRONECKER, DEDEKIND zu erinnern —, würde man im Namen der Mathematik dagegen Einspruch erheben müssen, daſs logische Disjunktionen allein zur Bestimmung mathematischer Gröſsen den Untergrund liefern dürften. Der Disjunktion kann diesmal der eine, ein anderes Mal ein anderer Einteilungsgrund untergelegt werden, ohne daſs sie ihre Richtigkeit und die Glieder ihre Gleichberechtigung einbüſsten. Die regelmäſsigen Körper können entweder von Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken begrenzt werden. Ich weiſs wieder

nicht, in welche Gruppe ein mir unbekannter regelmäfsiger Körper gehört, und behaupte, dafs für das Hexaeder die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ ist.

Wenn meine ganze Kenntnis sich auf die Disjunktion beschränkt, so kann eine mathematische Aussage nicht gemacht werden. Denn wenn Stumpf sagt:

> Das Wahrscheinlichkeitsurteil ist „nicht selbst ein disjunktives Urteil, aber eine Folgerung aus einem solchen in Verbindung mit einer zweiten Prämisse, der Anerkennung völligen Nichtwissens über die einzelnen disjungierten Glieder",

so werden wir ihm bei jeder logischen Disjunktion entgegenhalten müssen:

Wir wissen zwar nicht, ob dieses $A$ ein $B_1$ oder ein $B_2$ oder ein $B_3$ ist, von denen es eines notwendig sein mufs; aber das ist uns ja hinreichend bekannt, dafs die logische Disjunktion gar nichts darüber besagt, wieviel „Elementarfälle" unter den $B_1$ oder $B_2$ oder $B_3$ wirklich enthalten sind.

Wenn ich aus drei Urnen ziehen kann, die Kugeln von verschiedener Farbe und verschiedener Anzahl enthalten, so dafs immer eine Urne nur eine Farbe birgt, so kann ich aussagen, dafs die Wahrscheinlichkeit für eine Kugel bestimmter Farbe $\frac{1}{3}$ ist; werfe ich die Kugeln zusammen, so ist die Wahrscheinlichkeit für denselben Fall eine ganz andere, auch wenn ich das Zahlenverhältnis selbst nicht kenne. Die logische Disjunktion ist beidemal völlig dieselbe; nur mufs ich nach der Vereinigung der Kugeln sagen, dafs ich die Wahrscheinlichkeit zahlenmäfsig nicht anzugeben vermag, wenn mir über die Herkunft der Kugeln nicht etwa noch andere Angaben gemacht werden. Man vergifst immer, dafs die Aufgaben dieser Natur bestimmte Voraussetzungen enthalten, die in der Anwendung auf wirkliche Dinge erfüllt sein und nachgewiesen werden müfsten. So wäre die gleiche Wahrscheinlichkeit einer jeden Zahlenkombination in der Verteilung unter verschiedenen Farben, eine Voraussetzung, wie sie in Aufgaben dieser Art häufig ausgesprochen zu werden pflegt. Giebt man diese zu, so braucht man den Rechenstift wahrlich nicht, denn schon die Symmetrie lehrt, dafs kein Fall der Verteilung nach Farbe und Zahl, also auch kein individueller Fall, vor den disjunkten anderen Fällen etwas voraus haben kann.

Wird denn aber in der abstraktesten Disziplin, der Mathematik, für die 5 regelmäfsigen Körper oder für die 3 verschiedenen Dreiecke oder für die Kegelschnitte eine solche gleiche Wahrschein-

lichkeit jemals hypothetisch angenommen, geschweige denn als eine Maxime der weiteren Betrachtung behauptet? Und wenn die Logik wirklich, was ich nicht einzusehen vermag, diese ganze Verhaltungsweise unseres Verstandes als notwendig vorschriebe, wenn wirklich ein unendlich starker Verstand, sofern er nur nicht allwissend ist, so denken müfste, was sollte uns das nützen, da wir doch niemals von ihr in den Schranken, in welchen wir uns bewegen, irgend einen Gebrauch zu machen imstande wären?

Wir sind in der Definition der gleichwahrscheinlichen Fälle auf zwei Möglichkeiten eingeschränkt. Entweder wir nennen gleichwahrscheinlich die Fälle, welche Glieder einer guten logischen Disjunktion sind, wenn diese Disjunktion das Einzige ist, was wir differenzierend auszusagen vermögen, oder aber wir verlangen eine mathematische Disjunktion, indem wir den Anspruch erheben, dafs in den Gliedern niemals der unbestimmte Artikel, sondern immer ein- und dieselbe Zahl die möglichen Fälle abzählt. Wir wollen zugestehen, dafs dieser Unterschied niemals von praktischer Bedeutung werden kann, wenn immer der Einspruch geltend gemacht wird, dafs eine logische Disjunktion über die Häufigkeit der einzelnen Fälle in den meisten bekannten Beispielen absolute Gleichheit nicht aussagt oder nur implicite enthält, dafs also trotz aller Unkenntnis über den einzelnen Fall eine sehr bestimmte Kenntnis die Unwissenheit trübt. Als allgemeine Warnung könnte man die Disjunktion: „Eine Primzahl ist entweder gerade oder ungerade,“ vorausschicken. Aber man hat festzuhalten, dafs eine mathematische Bestimmung Eindeutigkeit verlangt. Diese Eindeutigkeit wird durch mathematische Konsequenzen nicht gestört, aber wo wir die Feinheiten des Kombinationskalkuls anwenden, kommen wir über die Elemente, welche im Grunde verwandt worden sind, beim Weiterbau nicht hinaus. Eine Kombinatorik der Disjunktionen — wenn man will, eine Mathematik des disjunktiven Urteils —, deren Anfänge sich bei Sigwart vorfinden, ist möglich, weil die Kombinatorik es nur mit irgend welchen Elementen zu schaffen hat, ohne sich um ihre Eigenschaften zu kümmern. Dafs aber Urteile dieser Art Verbindungen zulassen, die mit den zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsaussagen eine um so gröfsere Ähnlichkeit haben, als die letzteren sich immer auf disjunktive Urteile zurückführen lassen, berechtigt auch nicht mit der Prämisse der absoluten Unwissenheit, eine Umkehrung vorzunehmen. Denn das Wesentliche ist in den mathematischen Urteilen, dafs die Prädikate samt und sonders

mit wirklichen Zahlen als Attributen versehen sind, während im andern Falle über den unbestimmten Artikel hinwegzukommen seine Schwierigkeiten haben möchte. Auch die absolute Unkenntnis vermag das nicht mit jenem Zwange, den wir von Urteilen verlangen, die aus unserem Denken mit dem Anspruch auf Notwendigkeit hervorgehen.

Wer die Werke GOETHES nach Worten absuchte, um die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, dafs ein Wort von GOETHE den Buchstaben *k* enthält, den würden wir verspotten, aber seiner Logik dürften wir um deswillen nicht zu nahe treten. Wofern aber Jemand — die Richtigkeit der KANTschen Kategorientafel vorausgesetzt — von einem Urteil, das er gar nicht kennt, aussagen würde: „Die Wahrscheinlichkeit, dafs dies mir fremde Urteil allgemein, bejahend, kategorisch und problematisch ist, beträgt $\frac{1}{81}$“, von dem würden wir annehmen, dafs er uns sagen wollte, dafs es $81 = 3^4$ Variationen auf Grund jener Tafel geben kann und weiter nichts. Wollte er aber mit der Zahl auch etwas anfangen und gar nur als wahrscheinlich vermuten, dafs die Zahl der Urteile dieser Art zur Zahl aller Urteile in unserer gesamten Litteratur sich wie 1 : 81 verhält, so wäre ihm die Probe auf das Exempel zu vergönnen. Für eine „artige Untersuchung“ im Sinne KANTS würden wir die Aufgabe nicht halten.

Die Geduld des Lesers, der uns bis hierher gefolgt ist, wird erschöpft sein. Indessen schien es unumgänglich, die Verschiedenheit der Auffassung, zu welcher die Lehre vom disjunktiven Urteil und ihre Verwertung in neuester Zeit den Anlafs geboten hat, zu beleuchten, und da die trockene Aufführung von Beispielen vielleicht am schwersten zu dulden ist, so haben wir es vorgezogen, sie in der Form einer Polemik gegen öffentlich vertretene, von sehr gewichtiger Seite kommende Anschauungen zu geben. Dabei leitete uns nur der Gedanke, der Mathematik als einer Lehre vom Bestimmten und Bestimmbaren zu ihrem Recht zu verhelfen und die Partei des gesunden Menschenverstandes zu unterstützen, soweit sein Beitrag durch den Begriff des Wahrscheinlichen geliefert wird. Man wird nach dem Vorangegangenen vermuten, dafs die Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit an das disjunktive Urteil sich halten, von ihm zahlenmäfsig bestimmte Prädikate verlangen und eine notwendig sich bietende abgeschlossene Reihe von Möglichkeiten individueller Fälle voraussetzen wird. Wie wir meinen, darf man dann als Mafs der Wahrscheinlichkeit für irgend

teil einen Bruch bezeichnen, in dessen Zähler die Summe der Fälle, die in der Disjunktion dies Urteil behaupten, in dessen Nenner aber alle möglichen Fälle in einer Zahl vereinigt sind. Vorausgesetzt ist dabei, daſs die Disjunktion alle wesentlichen Differenzen aufzählt, die das Urteil verändern könnten, daſs also die gesamte Kenntnis des zu beurteilenden Einzelfalles in derselben zum Ausdruck kommt, ausgenommen alle jene Verschiedenheiten, die im gewöhnlichen Beispiel schon durch Voraussetzung beseitigt, im allgemeinsten Falle aber nach der Fragestellung gleichgültig sind. In den Beispielen ist eine weiſse Kugel jeder andern mathematisch und physikalisch gleich zu denken, und in dem allgemeinen Falle, wo die Wirklichkeit uns eine Disjunktion aufnötigt, ist von den Verschiedenheiten, welche für das Urteil gleichgültig sind, wie bei jedem andern Urteil abzusehen. Daſs hier auch immer Differenzen auftreten, die von Einfluſs auf das Urteil sein können, aber der zahlenmäſsigen Wertung spotten und darum unberücksichtigt bleiben, wurde bereits bemerkt, aber das ist eine Sache der Praxis und berührt die Definition nicht. Die Heranziehung des disjunktiven Urteils macht die Betrachtung von den einzelnen Beispielen, an welchen sich die Herleitung des Begriffs bisher immer vollzogen hat, frei. Darin hat Stumpf recht, daſs es „die Eierschalen" abstreift, „die dem Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit von seinen Ursprungsbeispielen her noch anhaften". So ist denn auch seine Definition:

„Jede beliebige Urteilsmaterie nennen wir $\frac{n}{N}$ wahrscheinlich, wenn wir sie auffassen können als eines von $n$ Gliedern (günstigen Fällen) innerhalb einer Gesamtheit von $N$ Gliedern (möglichen Fällen), von denen wir wissen, daſs eines und nur eines wahr ist, dagegen schlechterdings nicht wissen, welches," auf demselben Untergrunde aufgebaut und in der Form auf den ersten Blick mit der von uns abgeleiteten völlig übereinstimmend. Wir würden nur „auffassen müssen" schreiben und die letzten Worte „dagegen schlechterdings nicht wissen welches" ganz weglassen. Diese Indifferenz steckt in den Voraussetzungen, die nicht scharf genug ausgesprochen werden können. Auch wird man gut thun, die „Eierschalen" in irgend einer Form bei der Unterweisung vorzuzeigen. Was wir sodann von den Zahlen $n$ und $N$ verlangen, daſs sie nicht nur durch eine logische, sondern durch eine zahlenmäſsige Disjunktion zu bestimmen sind, haben wir zur Genüge ausgeführt.

Wie aber seine Worte, dafs der Wahrscheinlichkeitsbegriff „keinerlei Voraussetzungen oder Überzeugungen hinsichtlich der objektiven Welt einschliefst", insbesondere auch nicht die der Gültigkeit des „Kausalgesetzes", mit jenem „auffassen können" sich in Einklang bringen lassen, wissen wir nicht, wie wir auch nicht wissen, auf Grund welcher Voraussetzungen sonst sich „günstige" und „mögliche" Fälle erkennen lassen. Nur dafs es nicht absolut notwendig ist, die allgemeinsten Voraussetzungen auch immer auszusprechen, geben wir zu. Die Definition hat durchaus den Charakter einer Ausführungsbestimmung und setzt die vollständige „Exposition" der vorbereitenden Gedanken voraus. Sie ist nicht rein mathematisch, weil sie ihre Begriffe nicht anschaulich vorzeigen kann. Mit ihr fängt die Mathematik in der Disziplin allerdings an; eben dafs man sie unter Umständen kurzer Hand giebt, ohne sie zu fundieren, hat den Mifsverstand verschuldet, dafs man sich in der Lehre durchweg auf mathematischem Boden befinde. Die neueste logische Richtung hat sehr recht, die Grundlagen für die Logik zu beanspruchen, aber sie vergifst, dafs so wenig die reine Anschauung als das formale Denken der Rechnung Schemata liefern kann, die uns das Verhalten des Verstandes auch nur plausibel machen könnten. Nur die angewandte Logik und die angewandte Mathematik werden zu konkurrieren haben. Die letztere läfst gerade in unserer Disziplin von der Subtilität, die ihr sonst eigen zu sein pflegt, viel vermissen; ein Studium der philosophischen Versuche wird das mathematische Gewissen aufrütteln und in zukünftigen Darstellungen den begrifflichen Elementen eine gröfsere Sorgfalt sichern können, als sie bisher üblich war.

Fassen wir noch einmal kurz zusammen, was entwickelt wurde, so glauben wir gezeigt zu haben, dafs keinerlei mathematische Prinzipien besonderer Natur zum Begriffe der mathematischen Wahrscheinlichkeit einen Beitrag geliefert haben, dafs ihm vielmehr die im gewöhnlichen Gebrauch bemerkte Eigentümlichkeit, verschiedener Grade fähig zu sein, wesentlich zugrunde liegt. Eine Vermehrung gleichwichtiger Gründe pflegt das Wahrscheinliche wahrscheinlicher zu machen und umgekehrt. Der Begriff des Wahrscheinlichen ist eingeschränkt auf das Gebiet, in dem wir auch die Möglichkeit einer sicheren Erkenntnis einsehen, d. h. also in der Sprache Kants: er ist bedeutungsvoll nur in der theoretischen Erkenntnis, womit übrigens noch nicht behauptet sein soll, dafs er die Erkenntnis zu vermehren imstande wäre. Förderung

ist nicht Vermehrung, und ein Mittel ist nicht der Zweck. Der Begriff der **mathematischen** Wahrscheinlichkeit ist eine Einschränkung des allgemeinen Begriffs auf die Fälle, in welchen eine arithmetische Disjunktion die Gründe zu zählen erlaubt; seine Bestimmung in der herkömmlichen Weise ist eine Konvention, wie sie jede Festsetzung eines Maſses verlangt. Die Festsetzung ist die zweckmäſsigste und überaus plausibel, aber der logische Zwang, der z. B. dem Schlusse:

Alle $S$ sind $P$
$S_1$ ist $S$
Also ist $S_1$ auch $P$

innewohnt, läſst sich mit dem durch alle nötigen Voraussetzungen gestützten Schlusse: $S$ ist entweder ein Glied von

$\alpha$ Gliedern $p_1$, $\beta$ Gliedern $p_2 \cdots\cdots$,

also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $S$ ein $p_1$ ist

$$= \frac{\alpha}{\alpha + \beta + \cdots\cdots}$$

nicht vergleichen, es sei denn, daſs man sich der Konvention fügt. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist also, trotz ihrer plausiblen Stipulationen und angesichts ihrer im wirklichen Geschehen ruhenden Schemata, keine rein logische Funktion der Urteilsmaterie, und was an ihr mathematisch ist, verlangt, daſs die lediglich logische Disjunktion als Berechtigung zur Aufstellung einer mathematischen Wahrscheinlichkeit nicht angesehen werden dürfe. Jede arithmetische bestimmte Disjunktion ist zugleich eine logische und läſst sich in diese überführen, aber nicht umgekehrt.

Die logische Disjunktion als Grundlage einer Konvention kann nicht zugegeben werden, weil mit ihren Einheiten wohl eine Kombination, aber keine andere als eine **symbolische** Rechnung möglich ist. Mit den Ursprungsbeispielen der Wahrscheinlichkeitsrechnung steht sie weder im Einklang, noch entspricht sie im Besonderen der Definition von Laplace, über die hinauszugehen weder ein Anlaſs noch ein zwingendes Bedürfnis gegeben ist. Man wird vielmehr gut thun, den Spielraum, welchen Laplace und die alte Schule dem Moment des Nichtwissens einräumen, gänzlich zu beseitigen und sich auf lediglich positive und eindeutige Daten zu verlassen.

Die gleichwahrscheinlichen Fälle verlangen mathematische und bedingen schärfste physikalische Gleichheit, die in den landläufigen Beispielen überall vorausgesetzt oder, wie man auch behaupten darf, konstruiert oder fingiert ist.

---

# Die gleichwahrscheinlichen Fälle.

Wenn man bei dem Spiele Wappen ($w$) oder Schrift ($s$) nach der Wahrscheinlichkeit fragt, in 2 aufeinanderfolgenden Würfen mindestens einmal Wappen zu werfen, so gelten als gleichwahrscheinlich die Würfe

$$w\,w, \quad w\,s, \quad s\,w, \quad s\,s,$$

und unter diesen sind 3, welche in der Disjunktion den Fall mindestens 1mal $w$ behaupten, so dafs die Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ nach allgemeinem Gebrauch gesetzt wird. Es ist bekannt, dafs D'ALEMBERT hiergegen Einspruch erhob. Man beendige das Spiel, wenn auf das erste Mal Wappen erscheine, also seien nur die drei Fälle

$$s\,s, \quad s\,w, \quad w\,s$$

zu zählen, die Wahrscheinlichkeit also $\frac{2}{3}$.

Diese ganze Frage dreht sich nun gar nicht um den Begriff und seine Grundlagen, sie hat es lediglich mit mathematischen Erwägungen zu thun, und zwar solchen allereinfachster Natur. Wenn man dem Urteil BERTRANDS[1]: „L'esprit de d'Alembert, habituellement juste et fin, déraisonnait complètement sur le calcul des probabilités," nicht zustimmen möchte, so bleibt fast nichts übrig, als an den Eigensinn des grofsen Mathematikers, dem STUMPF die bekannte Aufgabe von den Sperlingen auf dem Dache vorrückt, zu glauben. Die gleichwahrscheinlichen Fälle zu zählen, ist eine lediglich mathematische Aufgabe; was aber als gleichwahrscheinlich vorauszusetzen ist, das ist eine ganz andere Sache. In dem Abzählen, wie verwickelt auch die Kombinationen erscheinen mögen, kann unmöglich ein Gegenstand des Streites liegen, die Schwierigkeit wird also in den Voraussetzungen

[1]) Calcul des probabilités. Paris 1889. S. X.

ruhen, die, sei es versteckt, sei es offen, einer jeden Aufgabe innewohnen. Bis zum heutigen Tage ruht der Streit nicht, der so vornehme Geister wie D'ALEMBERT und LEIBNIZ in die Opposition gedrängt hat, eine Thatsache, die zumal bei dem Interesse des letzteren und dem Anteil, den er an kombinatorischen Problemen auch für die Zwecke der Wahrscheinlichkeitsrechnung nahm, doch immerhin die Aufgabe nicht als eine müfsige erscheinen läfst, hier einen Ausweg aus dem Labyrinth, das sich in der Litteratur bietet, wenigstens zu suchen. In neuester Zeit hat v. KRIES in einem sehr eingehenden und scharfsinnigen Werke: „Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung" die Zweifel zum Ausdruck gebracht, die nicht ihm allein, sondern vielen Zeitgenossen einem Hülfsmittel von allgemeiner, aber häufig kritikloser Verwendung gegenüber aufgestofsen sind. Selbst eine in der Form nicht ganz angemessene und eine nicht ganz gerechte Kritik, wie die von ELSAS in den Philosophischen Monatsheften, hat anerkennen müssen, dafs jenes Buch ihrem Verfasser Anregung und Anlafs zum Nachdenken geboten hat. Aber eine Umschau in der Litteratur hätte dem Kritiker zeigen können, dafs Theorie und Anwendung der Disziplin dringend zu einer Prüfung auffordern. Es gilt auch nicht, ein neues Land zu entdecken, sondern den Boden zu untersuchen, auf dem man sicher einherschreiten könne. Uns stehen die Anschauungen von ELSAS vielfach näher als die von v. KRIES, mit welchen wir uns mehrfach werden auseinandersetzen müssen.

An jenes berühmte Beispiel von D'ALEMBERT wurde STUMPF durch einen der vielfachen Einwände von v. KRIES erinnert, der aus Übungsbeispielen der Lehrbücher auf eine Willkür der Ansätze schliefst. Diesen Vorwurf werden wir zu prüfen haben.

Wenn zwei Spielkarten auf dem Tische liegen, ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs sie beide dieselbe bestimmte Farbe haben, $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$?

v. KRIES meint: Beide Antworten sind gleichberechtigt, und also ist der Ansatz willkürlich.

Wofern die Zweifel gerechtfertigt wären, würde man schwerlich umhin können, auch den berühmten Fall D'ALEMBERTS nochmals zu überlegen, und man müfste sich darauf gefafst machen, das Problem mit in das neue Jahrhundert als Debet-Saldo hinüberzunehmen. v. KRIES hat zunächst nicht recht, sich die Frage vorzulegen, wie der Sachverhalt wohl entstanden gedacht werden kann, denn hier müfsten wir ihm ohne weiteres zugestehen, dafs wir weder

Aufschlufs zu geben noch überhaupt zu folgen vermöchten. Über die Eventualität bestimmterer Annahmen, ob die Karten aus einem Piket- oder Whistspiele entstammen, hatte sich ja auch Poisson, den er kritisiert, bereits geäufsert. Im D'Alembertschen Beispiel lag die Voraussetzung gleicher Wahrscheinlichkeit für Wappen oder Schrift im Spiel. Die Münze mit ihren Eigenschaften, die Ehrlichkeit des Spiels waren gewissermafsen mathematisiert, und so kümmerte uns nur das wichtige Abzählen, das man sich durch Erwägungen über das, was der Spieler etwa thun würde, nicht stören zu lassen gezwungen ist.

Wie kann man nun hier zu einem Ansatz kommen? Man weifs schlechterdings nichts über die beiden Karten. Was ist daraus zu folgern? Ginge man auf alle Möglichkeiten ein, wie v. Kries das meint, so müfste man auch den Fall erwägen, dafs die Karten nicht blofs auf zwei Farben beschränkt zu werden pflegen; es giebt rote, schwarze, grüne und gelbe Karten. Man lächle nicht; angesichts so verschiedener Meinungen hilft nichts anderes, als auf den Grund zu gehen. Also man setze voraus, dafs es sich nur um Karten von zwei bestimmten Farben, Rot und Schwarz, handle. Es können beide rot, beide schwarz und beide von verschiedener Farbe sein. Wir wissen schlechterdings nicht mehr von den Fällen; also wäre z. B. die Wahrscheinlichkeit für „beide schwarz“ $= \frac{1}{3}$. Wir meinen — und appellieren damit an jeden unbefangenen Verstand —, dafs diese Disjunktion logisch vollständig und völlig einwandfrei ist. Stumpf ist der Meinung, dafs vier Fälle möglich sind, und scheidet noch die beiden rot schwarz, schwarz rot. „Immer mufs als Zahl der möglichen Fälle das Maximum der innerhalb der Problemstellung noch unterscheidbaren Fälle genommen werden.“ Wir würden „das Maximum“ durch „alle Fälle“ ersetzen und behaupten, dafs unsere drei Fälle alle in der Problemstellung noch unterscheidbaren auch wirklich bedeuten. Dem Problem haftet auch ganz und gar nichts an, was zur Unterscheidung der Anordnung der Karten aufforderte; sonst würde zu verlangen sein, dafs auch die beiden $r\,r$, $s\,s$ noch in zwei verschiedenen Plätzen sich anordnen können, was doch entschieden der Problemstellung zuwider ist. Eine logische Frage ist es doch nicht, wie der Fall verschiedener Farben sich verwirklichen kann. Die Antinomie löst sich nun leicht, wenn man folgendes bedenkt. Die Lehrbücher pflegen Beispiele zu geben, in welchen aus der Natur der verwandten Illustrationen sich leicht eine Meinung über die gleichwahrschein-

lichen Fälle bildet. Der ideale Würfel, die Münze, das Kartenspiel — sie alle weisen auf jene Gleichheit hin, die wir von den Fällen verlangen, damit wir ein gleichwahrscheinlich behaupten. Ohne diese Basis schweben alle Aufgaben in der Luft, oder es wird aus der Unwissenheit etwas gefolgert, während sich doch schlechterdings auch im Bereiche der Wahrscheinlichkeit nichts aus ihr folgern läfst, am allerwenigsten aber eine numerisch angebbare Bestimmung.

Die Kunst der sogenannten eingekleideten Aufgaben in mathematischen Büchern pflegt darin zu bestehen, die Leser das auffinden zu lassen, was an mathematischem Gehalt hineingelegt wurde. Die Voraussetzungen sind versteckt, aber die ganze Maxime ist ähnlich der, welche der Taschenspieler carte forcée benennt. Wir müssen in der Auswertung jener Wahrscheinlichkeit mit dem Bruche $\frac{1}{4}$ Stumpf entschieden zustimmen, obwohl seine Ausführungen auf uns diesen Zwang durchaus nicht ausgeübt haben. Wie in dem D'Alembertschen Beispiele alles darauf beruhte, dafs im einzelnen Wurfe Wappen und Schrift die gleiche Wahrscheinlichkeit hatten, so wird auch in unserem Beispiele nicht aus der Unwissenheit gefolgert, sondern es wird vorausgesetzt, dafs in dem Platze einer jeden Karte mit gleichem Recht eine rote oder eine schwarze sich befinden könne. Dann erst sind die Fälle

$$r\,r, \quad s\,s, \quad r\,s, \quad s\,r$$

als gleichwahrscheinliche anzusehen. Giebt man das nicht zu, so sehe ich nicht — unbekümmert um die Fassung und Begründung in den Lehrbüchern —, wie man jener Antinomie und im weiteren Sinne den uferlosen Erwägungen von v. Kries aus dem Wege gehen wollte.

Woran mag es nur liegen, dafs die so einfache Forderung, mathematische Aufgaben, an denen die Kombination sich üben und ausbilden sollte, nach ihren Voraussetzungen zu beurteilen, verborgen bleibt, und dafs man jene harmlosen Übungsbeispiele in endlosen Deutungsversuchen hat diskreditieren können? Die eben deshalb an die Spitze gestellte Aufgabe D'Alemberts giebt bei näherer Betrachtung jede erwünschte Auskunft. Das Kapitel von der Wahrscheinlichkeit a priori ist immer als Faden einer wohlbekannten Praxis abgesponnen worden. Nur so war es möglich, dafs man nicht blofs das Spiel, sondern auch den Spieler mit in die Voraussetzungen aufgenommen hat. Was dieser thut oder thun zu müssen glaubt, ist völlig gleichgültig. Wie er zählen soll, lehrt

die Disziplin; was er zählen soll, folgt aus den Bedingungen des Spiels; sind diese nicht scharf beschrieben, so soll man lieber auf das Zählen verzichten. Eine Aufgabe, die verschiedene Ansätze und Resultate ergiebt, ist unbestimmt; $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ nebeneinander beziehen sich sichtlich auf verschiedenen Sachverhalt, der sich ohne weiteres in beiden Formen herstellen läſst. Hat man den Begriff der Rechnung definiert, so hat man der Kombinatorik die Thore geöffnet, die nur auf Grund fester Voraussetzungen, auf einem sicheren Boden Bedeutsames zählen kann. Von Irrtümern, die hier bei der steten Kontrole der Mathematiker so gut wie ausgeschlossen sind, wimmeln nur die Auslegungsversuche. Kein Wunder, wenn angesichts der unbestimmten „Ereignisse", des „Rechts der Erwartung" und der ebenso überflüssigen als völlig unklaren psychologischen Deutung, der noch weniger befriedigenden Terminologie, die mit apriorischer und aposteriorischer, subjektiver, objektiver, abstrakter und empirischer Wahrscheinlichkeit, mit Ursachen und Bedingungen fast so umspringt, als könnte man die Bezeichnungen aus einer Urne ziehen, es schwer gemacht wird, sich nur einigermaſsen in den Sinn der Disziplin zu finden. Auch die Verquickung mit statistischen und versicherungstechnischen Problemen, die so wenig als die ersten theoretischen Entwicklungen hinreichend vorbereitet werden, trägt einen Teil der Schuld. Und wo es die Gewissenhaftigkeit des Schriftstellers verlangt, auch philosophische Erörterungen mit in den Kauf zu geben, ist es fast noch schlimmer. Was soll man dazu sagen, wenn Definitionen von Spinoza mit in den Text verwebt werden, wenn ferner das, was aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung in das alltägliche Leben gedrungen ist, nun wieder verwandt wird, um das eigentümliche Maſs erst zu begründen, und wenn nun gar der so vieldeutige Begriff des Zufalls, ohne den Versuch einer Erläuterung, mit in die Aktion tritt? Dieser Litteratur gegenüber ist es wahrhaft erfrischend, in Schriften, wie sie uns v. Kries und Stumpf geliefert haben, die Zumutung und Anregung zu finden, die Grundgedanken der eigenartigen Disziplin nochmals durchzudenken, in der Lotze „die groſsartige logische Leistung" erblickt, „die der erfinderische moderne Geist den bewunderungswürdigen, aber unfruchtbaren Theorien des Altertums entgegenzusetzen hat".

Man wird es daher entschuldigen, wenn im folgenden wiederum an Kontroversen angeknüpft wird, welche sich an die Namen jener

beiden Schriftsteller und an Fragen anreihen, die in diesem Kapitel zur Verhandlung stehen.

Es ist nichts anderes, ob die gleichwahrscheinlichen Fälle sich unmittelbar aus einer Aufgabe ergeben, wie bei den Kugeln von bestimmter Farbe und bestimmter Verteilung in einer festen Zahl, oder ob man eben den Fall, der zur Beurteilung steht, zurückführen mufs auf Wahrscheinlichkeiten, die erst Elemente in neu zu kombinierenden Grundlagen zu suchen haben. Im Beispiele von D'ALEMBERT war die Wahrscheinlichkeit für Wappen und Schrift je $\frac{1}{2}$, für jede Variation beider Möglichkeiten nach dem Satze von den zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}$$

und, da von diesen Variationen 3 der Aufgabe entsprechen, die Wahrscheinlichkeit für mindestens 1mal Wappen in 2 Würfen $\frac{3}{4}$.

Es ist nicht unsere Absicht, die Rechnungsregeln hier abzuleiten, da in der That in der Wahrscheinlichkeitsrechnung a priori sich, wenn überhaupt von solchen geredet werden kann, keine anderen Grundsätze als die in der Definition verwerteten vorfinden. Alles ruht auf den gleichwahrscheinlichen Fällen, und diese sind durch eine einfache Abzählung zu ermitteln; setzen sich indessen die Fälle zusammen, so mufs man natürlich auf ihre Elemente zurückgehen. Man sieht, dafs ein qualitativer Unterschied des Urteils weder beabsichtigt noch erreicht wird. Kann hier mit gleichem Recht eine rote oder schwarze Karte liegen, so wird aus dieser einen Annahme alles andere gefolgert. Der Unterschied liegt also nur in den mathematischen Anforderungen, die an den Urteilenden gestellt werden; er fällt für den im Kombinieren Geübten vollständig hinweg, wenn man will, und logisch kann man von dem Rechte Gebrauch machen, als Prämissen solche zu verwenden, die schon auf früher Festgestelltem ruhen. Wenn JACOBI [1]) recht hatte, zu sagen: „Die Mathematik ist die Lehre von dem, was sich von selbst versteht", so bietet die Mathematik ja nur die einzige Schwierigkeit, den Standpunkt zu erklimmen, von dem aus ein Zusammenhang unter den Gröfsen als selbstverständlich erscheint. Ein Unterschied im Werte des Urteils kann also durch gröfsere Anforderungen an den

---

[1]) Ich verdanke die Kenntnis des Ausspruchs einer mündlichen Mitteilung meines verstorbenen Lehrers M. A. STERN. Die Äufserung verlangt ein granum salis und soll wohl die Lehre KANTS von den synthetischen Urteilen nicht kritisieren.

mathematischen Blick weder entstehen, noch ist man genötigt, mit den von v. Kries unterschiedenen ursprünglichen und abgeleiteten Spielräumen einen Zwiespalt in die ganze Betrachtungsweise zu bringen. Diese Differenz, die im Grunde nichts anderes bedeutet, als die Anforderung eindeutiger Bestimmungen für die Aufgabe, ist in den von v. Kries besprochenen Beispielen sofort behoben, wenn man ihnen das Piedestal fester Voraussetzungen giebt. Seine Kritik schiefst über das Ziel hinaus, wenn sie von unbestimmten Aufgaben auf die Willkür der Ansätze schliefst. Er ist auch von dem Vorwurf nicht freizusprechen, dafs er selbst Aufgaben stellt, die Niemand als solche ernstlich behandeln würde.

Weil hin und wieder gegen die Präzision gefehlt wird, ist das allgemeine Verfahren nicht schlechthin zu verwerfen. Man müfste sonst auch die Sätze der Mathematik, die nicht alle ihre Voraussetzungen aufzählen, für minder sicher halten, als die ersten Prinzipien, während auch hier zugegeben werden wird, dafs bei diesen die eigentlichen Schwierigkeiten für die Erkenntniskritik ruhen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nun, wie wir gezeigt haben, keine Axiome, sondern für sie giebt die Basis nur eine Verständigung über ein Mafs, das, wie jedes andere, auch auf einer Übereinkunft fufst. In Beispielen, die als in gewissem Sinne mathematische bezeichnet werden, hat man aber zweifellos das Recht, Voraussetzungen zu machen, die zwar willkürlich sind, aber niemals den Schlufs zulassen, dafs der Ansatz es ebenso sehr sei.

Von diesem Standpunkte entschwinden denn auch alle Zweifel, die von v. Kries gegen die Urnenbeispiele gerichtet werden, sofern sie eine zahlenmäfsige Angabe über die Kugeln nicht enthalten und nur voraussetzen, dafs Kugeln von verschiedener Farbe, von unbekannter Zahl und Mischung darin sich vorfinden.

Wir haben oben beanstandet, dafs man von einem Würfel aussage, die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Seite sei $= \frac{1}{6}$, gleichviel, ob man voraussetzt, dafs er genau, oder auch nur, dafs man ihn nicht kenne, und dafs er sonst beschaffen sei, wie er wolle. Wie werden wir uns nun zu dem Bedenken von v. Kries verhalten, der befremdlich findet, dafs die Wahrscheinlichkeit, eine $w$ Kugel aus der Urne zu ziehen, $\frac{1}{2}$ sei, ob wir wissen, dafs in ihr gleichviel $w$ und $s$ Kugeln ruhen, oder ob wir nur über das Vorhandensein $w$ und $s$ Kugeln, aber nicht über ihre Verteilung unterrichtet sind? Sehen sich die Einwürfe nicht ähnlich wie ein Ei dem andern? Der Blick trügt nicht, aber in dem v. Kriesschen Beispiele ist doch

ein wichtiges Moment übersehen, das mit einem Schlage die Position verändert.

Wer die Urne mit unbekanntem Mischungsverhältnis zur Aufgabe darbietet, der läſst nicht aus unserer Unkenntnis folgern, wie Stumpf meint, sondern er giebt uns zugleich als Bestimmungsstück der Aufgabe die gleiche Wahrscheinlichkeit einer jeden möglichen Mischung. Daſs in den Lehrbüchern dieses Datum nicht immer ausdrücklich ausgesprochen wird, kann nicht davon zurückhalten, es für notwendig zu erklären. Wenn die gleiche Verteilung der Kugeln gegeben wird, so heiſst das nichts anderes, als daſs an jeder Stelle mit gleichem Recht eine *w* oder *s* Kugel sich befinden kann, denn wenn auch das wirklich vorhandene, aber unbekannte Mischungsverhältnis dies nicht zulassen würde, so entspricht doch einem jeden ein anderes, in dem die Verteilung völlig symmetrisch hierzu vorhanden ist. Vom Ziehen wollen wir einmal ganz absehen. Es hat keinen Zweck und führt keinen Schritt weiter, sich mit allen Eventualitäten, die mit den Bewegungen der Hand oder den Funktionen irgend eines künstlichen mechanichen Apparates zusammenhängen, abzuplagen.

Welche von den unendlich vielen Kombinationen, die sich auf Zahlenverhältnis und Mischung beziehen, vorhanden sein mag, immer kann sowohl eine *w* als eine *s* Kugel die Stelle ausfüllen; so ungefähr heiſst es auch bei Stumpf.

Kann ich denn das aber wirklich aus meiner Unkenntnis über alle Verhältnisse schlieſsen? Wer sagt mir denn, daſs die unendlich vielen Kombinationen immer mit der Parität, die notwendig ist, eine jede von beiden Farben bedenken? Trete ich an den Fall in Wirklichkeit heran, so müſste ich bei der Annahme unendlich vieler Kugeln immer zugleich fingieren, daſs auch das „unendlich" bei beiden Farben von gleicher Ordnung ist; sonst könnte ja doch trotz der unbestimmten Gröſsen wenigstens ihr Verhältnis einen endlichen Wert haben und so die Gleichheit direkt gestört zu denken sein. Hier ist eine Urne voll Kugeln, von denen eine jede dasselbe Gewicht gewöhnlicher Kohle oder Diamant verborgen in sich schlieſst. Zahl und Mischung wird nicht gegeben. Ist dann auch die Wahrscheinlichkeit für $K$ oder $D = \frac{1}{2}$? Die Seltenheit des Diamant, die Gemeinheit der Kohle legen nahe, eine gröſsere Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall anzunehmen. Zahlengemäſs dieses Wissen, das auch Stumpf veranschlagt haben will, zu verwerten, bietet sich nicht der geringste Anhalt. Es wäre absurd, hier über

das Vorkommen von gewöhnlicher Kohle und von Diamant etwa statistische Ermittelungen heranzuziehen. Auch zur Abschätzung reicht das, was ich weifs, durchaus nicht hin, und man mufs sagen: die Wahrscheinlichkeit läfst sich weder mathematisch noch sonstwie angeben. Es kann sein, dafs ein *D* gezogen wird; es kann aber auch nicht sein. Wir müssen Daten haben, die eine zahlenmäfsige Disjunktion wirklich zulassen. Wenn uns nun gesagt wird, dafs der Behälter absichtslos und ohne Kenntnis des Inhalts aus einer Anzahl genommen ist, die alle Mischungsverhältnisse repräsentiert, dann wird die Sache ganz anders. Dann sind die Kombinationen, welche Zahl auch überhaupt in der Urne und in welcher Mischung sie gefüllt ist, ein Mittel der Rechnung, die mit aller Exaktheit dem Begriffe der Wahrscheinlichkeit gerecht werden kann — obwohl das Resultat $\frac{1}{2}$ sodann, wie wir sehen werden, der Rechnung gar nicht bedarf.

Aber schon wenn wir nur wüfsten, dafs die *K* und *D* in der Fabrikation in gleicher Zahl hergestellt zu werden pflegen, könnten wir hierauf rekurrieren und nach unserer Kenntnis als Voraussetzung aussprechen: jede Stelle kann sowohl ein *K* als ein *D* ausfüllen, vorausgesetzt, dafs die Füllung ganz absichtslos aus einem sehr grofsen Vorrat entnommen worden ist. Einen andern Sinn vermögen wir allen jenen Beispielen der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht beizulegen, die aus der ganzen Sphäre heraus, in der sie sich bewegen, schliefsen lassen, dafs a priori, d. h. nach unserer vorherigen Kenntnis, eine jede *w* Kugel soviel Rechte zu beanspruchen hat, als eine *s* oder *r*, eine jede rote Karte soviel als ihr schwarzes Pendant.

Die logische Disjunktion kann allein niemals eine Wahrscheinlichkeitsaussage stützen, und legt man sie dem Begriffe als das Wesentliche unter, so kommt die Rechnung, die ja möglich ist, über eine Symbolik nicht hinaus, welche dem Wesen der Messung völlig zuwider ist, weil wir mit Symbolen wohl etwas deuten und veranschaulichen können, aber nicht objektiv zu vergleichen imstande sind. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ unter allen Umständen als ein Symbol unserer völligen Unentschiedenheit anzusehen, hat einen sehr plausibeln Schein für sich; es wäre überaus wichtig, zu wissen, ob diese Darstellung eines logischen Verhaltens der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Gebrauch vorangegangen ist, oder ob sie nur mit vielen ähnlichen Wertungen, die im gewöhnlichen Leben ohne gehörige Legitimation herumlaufen, den Niederschlag bedeutet, der

von der in ihren Elementen so leicht zu popularisierenden Wissenschaft erst ausgeht. Hatte Hume mit seiner Deutung des Kausalbegriffs als eines Produktes der Gewohnheit sicherlich nicht recht, so giebt die alltägliche Beobachtung nicht allein, sondern die ganze Litteratur der Wahrscheinlichkeitsrechnung doch die Frage auf, wie ein Gewohnheitsunrecht sich so einnisten könne, daſs man Usurpation und rechtmäſsigen Besitz kaum mehr zu trennen vermag. Setzt man jene gleiche Wahrscheinlichkeit für jede *w* oder *s* Kugel nicht voraus, so kann man sie aus der Unwissenheit nicht folgern, ohne den ersten Begriff zu degradieren. Was sonst den Kugeln recht ist, muſs den regelmäſsigen Körpern billig sein. Oder will Stumpf wirklich seine Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ für das Tetraeder (s. o. S. 77) durch die unendlich vielen Kombinationen für jeden Körper, die denkbar sind, gestützt wissen? In letzter Linie sagt doch auch das Urnenbeispiel nichts anderes als: Wird die Kugel, die zwar jetzt nicht in meiner Hand ist, aber es demnächst sein wird, *s* oder *w* sein? Genau wie beim Tetraeder, denn die Urne mit ihrem für das Urteil wesentlich unbekannten Inhalt ist doch nur Staffage. Alle Daten sind logisch scharf dieselben in dem einen oder dem andern Falle, wofern nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit für *w* und *s*, wie wir meinen, vorausgesetzt ist. Ja, dann ist ja aber das Urteil $\frac{1}{2}$ ganz selbstverständlich? Man vergleiche Jacobi.

Wenn Stumpf nun auch die Bedenken gegen die Thatsache, einmal aus gleicher und dann aus unbekannter Verteilung dieselbe Zahl $\frac{1}{2}$ zu schlieſsen, bestimmt zurückweist, so macht er doch, wenn auch sehr verklausuliert, die Konzession eines verschiedenen Erkenntniswertes. „Man könnte wohl sagen“ und dann: „Demselben, richtig bestimmten, mathematischen Wahrscheinlichkeitsgrad eines und desselben Ereignisses kann man einen verschiedenen Wert zuschreiben, je nachdem wir uns über wenige oder über viele Umstände in absoluter Unkenntnis nach der Seite der *w* wie *s* Kugeln befinden. Denn es ist immer besser, wenigstens in theoretischer Hinsicht, mehr zu wissen, als weniger, und unvernünftig wäre überhaupt jede Wahrscheinlichkeitsbestimmung, welche nicht auf so vielen Kenntnissen ruhte, als augenblicklich zu erlangen sind.“

Die mathematische Wahrscheinlichkeit soll, was auch immer, so doch wohl objektiv messen. Der Erkenntniswert oder der Wert eines „Wahrscheinlichkeitsgrades“ scheint aber denselben allgemeinen Anforderungen an seine Bedeutung genügen zu müssen, wie irgend ein anderes und wenn auch nur graduelle Verschiedenheiten mar-

kierendes Maſs. In der Mathematik scheidet man höhere und niedere nach den Ansprüchen, die sie an die Vorbildung stellt, aber der Wert einer Bestimmung pflegt doch nicht gering geschätzt zu werden, weil es sich nur um ein Dreieck und nicht etwa um ein elliptisches Integral handelt. Man kann einen Satz vielleicht nach seiner Fruchtbarkeit in der Anwendung, sei es in theoretischer, sei es in praktischer Hinsicht, höher für die Wissenschaft veranschlagen, aber der Unterschied, den Stumpf zuzugeben scheint, ist doch der Mathematik und der Theorie vom Messen, sofern sie sich mit einem und demselben Maſsstab beschäftigt, wiederum völlig fremd. Die Worte „wenigstens in theoretischer Hinsicht" gestatten die Deutung, daſs Stumpf an die Wette gedacht hat. Denn hier ist es gerade umgekehrt. Wenn $A$ und $B$ wetten, so ist die Chancengleichheit nur bei absoluter Unkenntnis beider hergestellt. Je weniger gegeben ist, um so besser. Bei unbekanntem Mischungsverhältnis wird $A$, wofern auch nur ein Zweifel über die Unbefangenheit des $B$ vorhanden ist, nur dann wetten, wenn ihm die Wahl der Farbe überlassen bleibt. Auf die Gefahr hin, paradox zu scheinen, behaupte ich, daſs man aus der Chancengleichheit, der gleichen Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, nicht auf die Wahrscheinlickeit $\frac{1}{2}$ des zur Wette stehenden Falles schlieſsen darf. Es ist umgekehrt richtig, aber wenn Jemand rationellerweise wetten kann, so nötigt das noch gar nicht, sich dem Denkzwang der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ zu fügen. Niemand muſs wetten, aber zum Denken, scharf dasselbe zu denken, muſs man ihn zwingen können, wenn er sonst über den Denkinhalt aufgeklärt zu werden imstande ist. Um eine Theorie des Wettens aber hat sich der Psycholog zu kümmern, nicht der Logiker und auch nicht der Mathematiker. Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist richtig, oder sie ist es nicht; ein Drittes giebt's nicht. Oder sollte man, weil man gar nicht ins Klare kommen kann, angesichts des Streites der Gelehrten, sagen: Die Wahrscheinlichkeit ist $\frac{1}{2}$, daſs die logische, und $\frac{1}{2}$, daſs die mathematische Deutung gleichwahrscheinlicher Fälle richtig ist? Ich bekenne aufrichtig, daſs ich angesichts der Kontroversen sehr oft auf diesem Standpunkt mich befunden habe, ein Tribut, den ich dem „logischen" Standpunkt als eine vorläufige Ausflucht gezollt habe. v. Kries hätte völlig recht, zu behaupten, daſs unser intellektuelles Verhalten in beiden Fällen ein wesentlich verschiedenes sei, daſs in dem ersteren Falle die Gleichsetzung „durch ein objektiv bestehendes und uns bekanntes Verhältnis eine ganz positive Begründung" er-

fährt, „welche in dem andern Falle nicht gleichermaſsen nachzuweisen ist", wofern nur im zweiten Falle eine ganz beliebige Urne in den Beispielen gemeint wäre. Das v. KRIESsche Labyrinth von Vermutungen, die sich an dieselben knüpfen könnte, wird durch den Faden der Kombinationen, der von STUMPF abgerollt wird, nicht passierbar. Denn er ist nicht aus festem Garn, sondern selbst wieder ein Truggebilde, wenn nichts individuell Abzählbares da ist, was zu kombinieren ist. Es ist nur möglich, daſs an jeder Stelle eine $w$ oder eine $s$ Kugel sein kann. Alles andere soll ja ausgeschlossen sein, und auf die Thatsache, daſs kein formales Kriterium der Existenz der einen oder andern Kugel widerspricht, hat man nicht nötig zurückzugehen. Daſs es aber nun durch unsere Unwissenheit „gleichmöglich" werden soll, kann keine Definition glaubhaft dekretieren, ohne den Faden der Ariadne mit dem Zopfe Münchhausens zu verwechseln.

v. KRIES hatte die übliche Erwägung, bei unbestimmter Mischung alle Kombinationen als gleichwahrscheinlich zu setzen, also bei $n$ Kugeln die folgenden Annahmen

$ns$; $(n-1)s, 1w$; $(n-2)s, 2w$; $\cdots\cdots 2s, (n-2)w$; $1s, (n-1)w$; $nw$

beanstandet; STUMPF findet dieselben ebenfalls irrtümlich, und wir lesen bei ihm:

„Ich muſs hier gestehen, daſs mir die herkömmliche Berechnung irrig erscheint. KRIES hat sich ein Verdienst erworben, indem er sie in Zweifel zog. Aber nicht kann ich zugeben, daſs ein fester Ansatz überhaupt unmöglich wäre. Bei gegebener Anzahl $n$ und unbekanntem Mischungsverhältnis ist, da jede individuelle Kugel gleichgut $s$ und $w$ sein kann, die Berechnung genau dieselbe, wie wenn ich $n$ mal (nacheinander oder gleichzeitig) mit der Münze werfe. Die Kombinationen: $n$ weiſse oder $n$ schwarze Kugeln sind weniger wahrscheinlich als die gemischten, und bei diesen wiederum richtet sich die Wahrscheinlichkeit nach der Anzahl der möglichen Permutationen" — und weiter:

„Also diese allerdings weittragende Korrektur der älteren, nur auf einer Inkonsequenz ruhenden Berechnung erscheint notwendig."

Der letztere Satz ist kaum verständlich, wenn uns über das von uns oben herangezogene Kartenbeispiel wenige Seiten später (S. 75) eröffnet wird:

„Aber hier ist die übliche Einleitung doch allein konsequent", und die Aufgabe, alle Fälle für zwei Karten von unbekanntem Mischungsverhältnis zu diskutieren, im Sinne der soeben als neu

konstatierten Weise gelöst wird. Die beiden Karten können sich erweisen als

1mal *2 r*, 2mal *1 r 1 s*, 1mal *2 s*.

Dafs es nur zwei sind, macht doch nichts aus, und dafs Karten und keine Kugeln im Spiele sind, hingegen die Urne fehlt, ist belanglos. STUMPF fühlte sich an D'ALEMBERT gemahnt; haben wir bei den Kugeln nicht denselben Scherben zu zerschlagen? Die logische Disjunktion ist durch die Fälle beide *r*, beide *s*, beide verschieden völlig erschöpft; was geht sie die verschiedene Anordnung an, wenn ihr das nicht durch die realen Beziehungen nahegelegt wird?

Nicht um diese Versehen aufzudecken, haben wir die obigen Stellen wiedergegeben, sondern weil sie geeignet sind, die logische Theorie völlig zu entwaffnen. Dafs POISSON, an dessen Namen sich die Kritik von v. KRIES und STUMPF knüpft, permutiert, wo er permutieren mufs, davon kann man sich leicht überzeugen. Aber wenn die Frage nach dem Zug einer *w* Kugel bei unbekanntem Mischungsverhältnis gestellt ist, hat man im Grunde weder Kombination noch Permutation nötig. Die vollständige Symmetrie giebt hier schon den hinreichenden Aufschlufs, immer unsere objektiven Voraussetzungen als notwendig festzuhalten[1]).

---

[1]) In der Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie (Jahrg. 1892) hat AD. NITSCHE den Fall für 2 Karten gerechnet: „Welche Wahrscheinlichkeit besteht, dafs die eine dieser Karten rot ist? Die Antwort lautet: Für den Fall, dafs beide schwarz sind, ist die verlangte Wahrscheinlichkeit $= 0$, für den Fall, dafs beide rot sind, $= 1$, für den Fall, dafs eine schwarz, eine rot ist, $= \frac{1}{2}$; somit ist die durchschnittliche Wahrscheinlichkeit für alle diese Fälle $= \frac{1}{2}$." Ferner heifst es dort:

„Zur Veranschaulichung, dafs diese Übereinstimmung nicht für den Fall von 2 Kartenblättern zufällig eintrete, seien noch folgende Fälle vorgeführt: Gesetzt, es seien in einem Gefäfse 3 Kugeln, so kann die Wahrscheinlichkeit, dafs eine einzelne derselben schwarz oder weifs sei, $= \frac{1}{2}$ gesetzt werden. Nimmt man aber an, es seien entweder alle 3 weifs oder 2 weifs, eine schwarz, oder 1 weifs, 2 schwarz oder alle schwarz, so ergiebt sich als Wahrscheinlichkeit, dafs weifs gezogen wird,

für den ersten Fall $= 1$
„ „ zweiten „ $= \frac{2}{3}$
„ „ dritten „ $= \frac{1}{3}$
„ „ vierten „ $= 0$

also für den Durchschnitt $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;

bei 4 Kugeln und gleicher Berechnung ergiebt sich als Durchschnitt

$$(1 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{4} + 0) : 5 = \tfrac{5}{2} : 5 = \tfrac{1}{2};$$

wären 3 Farben, so wäre die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{3}$ nach der alten Methode;

Wie soll man sich nun aber denken oder vorstellen, daſs eine Urne, die nur weiſse oder nur schwarze Kugeln enthält, viel weniger

---

bei 3 Kugeln aber würden sich nach der zweiten Methode folgende Kombinationen ergeben, deren jeder die auf „weiſs" entfallende Wahrscheinlichkeit beigesetzt ist:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 schwarz | | . . . . . . . . . | 0 |
| 2 „ | 1 weiſs | . . . . . | $\frac{1}{3}$ |
| 2 „ | 1 rot | . . . . . . | 0 |
| 1 „ | 2 weiſs | . . . . . | $\frac{2}{3}$ |
| 1 „ | 1 „ | 1 rot . . . | $\frac{1}{3}$ |
| 1 „ | 2 rot | . . . . . . | 0 |
| 3 weiſs | | . . . . . . . . . . | $\frac{3}{3}$ |
| 2 „ | 1 rot | . . . . . . | $\frac{2}{3}$ |
| 1 „ | 2 „ | . . . . . . | $\frac{1}{3}$ |
| 3 rot | | . . . . . . . . . . . | 0 |
| | | | $\frac{10}{3} : 10 = \frac{1}{3}$." |

Wir haben die ganze Stelle wiedergegeben, teils um die Ausführlichkeit unserer Darstellung zu rechtfertigen, teils aber der unleugbaren Anschaulichkeit wegen, mit der hier gezeigt wird, wie unten erscheinen muſs, was oben hineingethan worden ist. Stumpf findet die Rechnung seltsam; das ist sie, weil sie nicht nötig und ohne feste Voraussetzung bedeutungslos ist. Aber unschwer wäre doch die Übereinstimmung mit seiner eigenen Formel (S. 65)

$$\frac{1+2+3\cdots+n}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$$

zu erkennen gewesen. Die sich anschlieſsende Bemerkung Stumpfs: „Ich verstehe nicht, wiefern die Wahrscheinlichkeit, daſs eine der Karten rot sei, für den Fall, daſs eine rot und eine schwarz ist, noch $= \frac{1}{2}$ und nicht vielmehr $= 1$ sein soll," ist nun überaus begreiflich. Nitsche hat die v. Kriessche Darstellung irreführend genannt; wie es scheint, hat er dessen Worte

> „Ist es nun richtig, zu sagen, daſs jede Karte ebensowohl rot wie schwarz sein könne, oder daſs unter zwei Karten mit gleicher Wahrscheinlichkeit keine, eine oder zwei schwarze anzunehmen seien?"

miſsverstanden, denn daſs für jeden Fall dieser Alternative die Wahrscheinlichkeit, daſs eine bestimmte Karte rot oder schwarz sein müsse, $= \frac{1}{2}$ ist, hätte v. Kries gewiſs nicht bezweifelt. Leider hat nun aber Stumpf nicht bemerkt, daſs von Nitsche nur bei der „richtigen, d. h. konsequenten" Fragestellung übersehen wurde, das zunächst benutzte Attribut „bestimmte" zu wiederholen, ein lapsus, der ja passieren kann. Im übrigen fehlt auch mir der Schlüssel zu der Auffassung des Herrn Nitsche, der sehr zuversichtlich seine Korrekturen verkündet. Vor seiner neuen Terminologie würde ich mich nicht fürchten, obwohl an technischen Ausdrücken in der Wahrscheinlichkeitsrechnung schon ein Überfluſs vorhanden ist. Was aber die Anmerkung: „Da ich gerade daran bin, v. Kriessche Aufstellungen nach meiner Auffassung zu berichtigen" u. s. w. betrifft, so legt sie den Wunsch sehr nahe, zu erfahren, was denn der Verfasser eigentlich gemeint hat.

wahrscheinlich sei, als jede Mischung, wenn man von ihnen gar nichts weiſs? Man vergleiche nur zahlengemäſs, und der gesunde Menschenverstand wird staunen, welcher ganz wunderbare Fall sich ihm bietet, wenn er einmal eine Urne mit nur *w* oder nur *s* Kugeln auffindet. Und wenn ein alter Schriftsteller berichtete, daſs eine Urne mit 1000 weiſsen Kugeln gefunden wurde, wo man nur *s* oder *w* vermuten konnte, so wird man ihm nicht zu glauben brauchen, denn die Wahrscheinlichkeit dafür wäre $\frac{1}{2^{1000}}$. Es genügt dazu nur die Voraussetzung, „daſs wir absolut nicht wissen, ob eine absichtliche Anordnung hergestellt sei oder nicht". Darüber lieſsen sich von dem Schriftsteller auch noch beruhigende Versicherungen voraussetzen, aber nötig war es angesichts der nackten, ohne Kommentar berichteten Thatsache nicht. Auch bei der andern Annahme wäre die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1001}$ immer noch klein genug, um unsere Bedenken wachzurufen. Und doch lasse ich mir kein Tüpfelchen von den beiden Zahlen auf Grund der rein logischen Theorie hinwegnehmen. Sie geben scharf alle denkbaren Fälle, und sie sind alle auch zweifellos real möglich im Sinne Kants, also noch etwas mehr, als jene Theorie des reinen Verstandes verlangt. Der gesunde Verstand würde nun sagen, wie wir zuversichtlich glauben: ja dann sind aber die Zahlen für irgend eine Annahme, ein Urteil oder was sonst ohne jede Bedeutung. Oder sollte nicht in letzter Stunde etwa ein gelehrter Forscher entdecken, daſs mit weiſsen und schwarzen Kugeln abgestimmt worden ist, und daſs die Urne eine von zweien war, die andere aber verloren gegangen ist? Wir wissen jetzt also etwas; das Wahrscheinlichkeitsurteil ist verändert, und infolge unserer Kenntnis wird die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Ja, wann wissen wir denn aber gar nichts über die Dinge, wo wir schon ein disjunktives Urteil aussprechen können? Wo haben wir denn die Begriffe her, mit denen wir so feine Kombinationen anstellen können? Das thut der Logik nichts; die hat es nur mit den Formen des Denkens zu thun. Zugegeben, aber dann werden ja diese Künste erst recht bedeutungslos, da sie niemals auf Entfaltung rechnen dürfen. Was ist dann noch im Sinne Lotzes jener Syllogistik der Alten entgegenzustellen? — Eine leere Spielerei.

Vielleicht sieht man zugleich auch ein, daſs der aristotelischen Logik die ganze Betrachtung fremd war, wie die Begriffe Ohm und Ampère. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist keine Entdeckung,

sondern eine Erfindung; was an ihr wichtig ist, ist es nicht, weil es ist, sondern weil es zweckmäſsig befunden wird.

Wie steht es nun mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{1001}$ oder $\frac{1}{2^{1000}}$ bei der andern Auffassung? Wenn der alte Schriftsteller hätte berichten können, daſs ein Jahr hindurch in *X*-Land nur Knaben geboren worden sind, hätten wir dann nicht Ursache, die Kunde als sehr merkwürdig anzusehen?

Oder wenn in einer Stadt, deren Bürger zur einen Hälfte Müller, zur anderen Schulze heiſsen mögen, eine Versammlung von allgemeinstem Interesse ausgeschrieben wird, und sich nun eine zahlreiche Gesellschaft zusammenfindet: würden sich die Herren nicht höchlichst verwundern, wenn nur der Name Müller vertreten wäre? Auch hier müſsten wir wieder Voraussetzungen machen, damit nicht z. B. der Name des Einberufers unser Urteil ablenkt. Alle Bürger, auch die Schulze, müssen gleich wacker und am allgemeinen Wohl gleich interessiert und auſserdem müssen noch viele andere Gleichheiten gedacht werden, damit wir sagen können, dieser Vereinigung aller Müller konnte sich nur die Vereinigung aller Schulze zur Seite stellen, und jede andere oder jede numerische Verteilung beider Repräsentanten ist a priori wahrscheinlicher gewesen. Sollten wir wieder scharf urteilen, so müſsten wir voraussetzen, daſs nach ihrem ganzen Charakter an jedem Platze des Saales mit gleichem Recht ein Müller oder ein Schulze zu erwarten war. Wohl wissen wir, daſs dieser und jener am Erscheinen verhindert sein wird; nur haben alle denkbaren Hinderungsgründe gar nicht die Tendenz, den Müller vor dem Schulze und umgekehrt zu bevorzugen.

Beim Münzwesen spielt der Begriff des Remedium oder der Toleranz eine gewisse Rolle. Die von dem Gesetze vorgeschriebenen Gewichts- und Legierungsverhältnisse bei der Prägung scharf einzuhalten, hat technische Schwierigkeiten, so daſs ein Spielraum von etwa 2—3 pro mille, sowohl was den Feingehalt als das Gewicht angeht, zugelassen wird, und zwar sind die Abweichungen nach oben und unten erlaubt. Diese Erlaubnis nach der einen Seite auszunutzen, gilt nicht als honette Münzpolitik, und die Münzstätten verschiedener Länder prüfen sich daraufhin gegenseitig. Findet man bei einer Reihe von Versuchen an denselben Münzen nur Differenzen nach unten, so wundert man sich gar nicht erst darüber, sondern man nimmt an, daſs die Toleranzbestimmung ge-

mifsbraucht worden ist. Wenn das volle Gewicht zur Ausprägung verwandt worden ist, so müfste auch jeder minderwichtigen Münze eine andere entsprechen, die etwas mehr wiegt, wofern man voraussetzen dürfte, dafs der Defekt der einen Münze als Plus einer einzigen andern zu gute kommt. Wieder beruht das schnelle Urteil auf der Annahme einer gleichen, objektiv begründeten Wahrscheinlichkeit. Die begünstigenden Momente, die bei allen diesen Betrachtungen ausgeschlossen werden, können allerdings nur anthropomorphistisch gedeutet und erklärt werden. Wir setzen überall unsere eigenen Gedanken in die Erscheinungen. Weil wir uns anstrengen, um einen Körper in die Höhe zu ziehen, mufs auch auf der andern Seite eine Kraft gesetzt werden, die ihn wieder zu Boden zwingt. Wenn uns ein Teil der Kugeln besser gefällt, als die anderen, so werden wir sie vor den anderen bei einer Auswahl bevorzugen. Man darf ruhig die Urne weglassen und die Kugeln in gleicher Verteilung, aber in sehr grofser Zahl offen präsentieren. Nimmt man dann einen von dem Gedanken der Wahrscheinlichkeitsrechnung völlig freien Menschen, läfst man z. B. ein Kind nach Belieben sich Kugeln herausnehmen, so darf man getrost mit der Rechnung a priori die Wahrscheinlichkeit der Mischung, welche es zieht, bestimmen. Vielleicht trübt hier nur der Sinn für das Systematische, wenn das zu sagen erlaubt ist, die Richtigkeit des Urteils. Auch das Kind wird bald versuchen, eine gewisse Ordnung in seinen Zug zu bringen, wenn es nicht allzu klein ist.

Wir haben nun häufig die Wahl zwischen verschiedenen Dingen, ohne irgend einen erdenklichen Grund für das Objekt angeben zu können, auf das unsere Wahl trifft. Diese Gleichheit in den zur Wahl stehenden Dingen verlangen wir überall, auch, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung ansetzt, indem wir genau, wie wir Kräfte s e t z e n, eine Tendenz im Geschehen, die einen Fall vor dem andern bevorzugte, l e u g n e n. Jene Wahlfreiheit, nur bedingt durch die Übereinstimmung der Objekte, übertragen wir mit der Idee des Zufalls in das Geschehen selbst. Damit heben wir auch in Gedanken die Gesetzmäfsigkeit in der Natur nicht auf. Aber welches Interesse, oder wie wir es nennen wollen, sollte die Influenza haben, eher einen Müller als einen Schulze heimzusuchen? Sind aber sehr viel mehr Müller als Schulze vorhanden, so leuchtet auch ein, dafs mehr Müller als Schulze von der Influenza befallen werden können, und wenn jene Stadt zu $^9/_{10}$ von Müllers, zu $^1/_{10}$ von Schulzes bewohnt würde, so wären die Versammlungen eine Zusammensetzung zu-

gunsten der Müllers so gewohnt, dafs sie sich zu wundern keinen Anlafs gefunden hätten.

Wo wir also jene Tendenz im Geschehen leugnen, sprechen wir vom Zufall, von einem Begriff, der auf den ersten Blick lauter negative Merkmale zu haben scheint. Bei näherer Überlegung setzt er aber in den meisten Fällen sehr positive Bestimmungen voraus, mit denen man um so schärfer umzugehen hat, als sie eben eine negative Aussage stützen sollen. Es genügt hier niemals die Gleichheit, die der Begriff durch seine wesentlichen Merkmale herstellt. Ein Baum ist nicht dieser Baum, und für diesen Baum kann ich keinen andern pflanzen, der in allen seinen Verhaltungsweisen den ersten vollständig ersetzte. Der allgemeine Begriff entbehrt aller der Bestimmungen, durch welche seine Repräsentanten auf einen bestimmten Platz in ihrem Verhalten angewiesen sind, und wenn ich ihn durch eine logische Disjunktion in seine Unterbegriffe auswickele, so sind auch diese wieder Vereinigungen für die verschiedensten Individuen mit ihrer Eigenart, die ich voraussetzen oder behaupten mufs, ob ich sie im einzelnen kenne oder nicht. Nur wo in aller Strenge lediglich Formales, und dasselbe von Individuen und zwar von einem jeden Individuum, ausgesagt wird, oder wo wirklich, wohl keine absolute Vertretbarkeit, aber eine bis zur Ununterscheidbarkeit vorhandene physische Übereinstimmung ausgesagt werden kann, ist unserer Auffassung die Zuflucht zum Zufall gestattet, vorausgesetzt, dafs in dem Geschehen selbst nichts Rätselhaftes oder auch nur Unbekanntes verborgen ist.

Wie man auch die Beispiele einrichtet, immer kommt man auf jene scharfe Übereinstimmung individueller Elemente, die sofort gestört wird, wenn der Begriff neben seinen notwendigen Eigenschaften alle differenzierenden mitzuerwägen verlangt. Man denke an die regelmäfsigen Körper oder an sonstige mathematische Begriffe, die doch nur auf Gröfse und Gestalt als einzige Merkmale eingeschränkt sind. Welche Fülle von Möglichkeiten, die sich unserer Übersicht durchaus entziehen! Und wo die scharfe Übereinstimmung künstlich hergestellt wird, da treten so viele Nebenerwägungen ein, welche die Feststellung eines Zufalles im Sinne jener mangelnden Tendenz im Geschehen erschweren. Es ist deshalb aufserordentlich trügerisch, jene zum Teil formalen Beispiele des Kalkuls an der Hand von wirklichen Verhältnissen zu kritisieren, indem man den Sinn der Übungsaufgaben beiseite läfst. Wenn Stumpf die Mischungen in der Wirklichkeit für wahrschein-

licher hält, als die Ansammlung von Kugeln einer Farbe, so kann diese Ansicht rein logisch nicht begründet werden, wenn uns auch jede Disjunktion vorspiegelt, es könne ein jedes ihrer Glieder, weil wir nichts wissen, a priori, d. h. aus Gründen des Verstandes, als gleichberechtigt angesehen werden.

Vielleicht hat nichts so sehr zu Irrtümern Anlaſs gegeben, als die Bezeichnung der Wahrscheinlichkeit a priori. Daſs hiermit eine zeitliche und nur eine solche Bestimmung gemeint ist, leuchtet ein, und doch hat sich inzwischen, wesentlich infolge der allgemein geläufigen Kantschen Terminologie, eine Zweideutigkeit herausgebildet, die um so mehr zu täuschen imstande ist, als die aposteriorische Wahrscheinlichkeit, weil sie eben in der Anwendung auf vorangegangene Erfahrungen hinweist, scheinbar den Kantschen Gegensatz für die Wahrscheinlichkeit in Anspruch nimmt. Das disjunktive Urteil auf Grund der gegebenen Einteilung und ihre objektive Geltung vorausgesetzt ist a priori im Sinne Kants. Das Wahrscheinlichkeitsurteil, das sich auf die Einteilung stützt, ist immer a posteriori, denn es setzt die apriorische Bearbeitung des in der Anschauung gegebenen Inhalts notwendig voraus. Es gründet in einem Existentialurteil und will thatsächlich behaupten, daſs alle Fälle, welche es aufweist, auch wirklich existieren. In der mathematischen Aufgabe wird der ganze Erfahrungsinhalt nur hypothetisch behauptet und aus ihm die Konsequenz gezogen. Jenes „auffassen können“ in der Definition Stumpfs muſs auf ein Existentialurteil zurückführen, wenn wirklich eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden soll, die objektive Bedeutung für sich in Anspruch nimmt. Denn die Wahrscheinlichkeit „ist Wahrheit, aber durch unzureichende Gründe erkannt, deren Erkenntnis zwar mangelhaft, aber darum doch nicht trüglich ist,“ heiſst es in der Kritik d. r. Vernunft (S. 290 Kirchmann). Die Gründe sind unzureichend, aber sie selbst müssen doch nach den Regeln der transscendentalen Analytik erkannt sein. Die Stumpfsche Ansicht über die Mischungsverhältnisse hat entweder anzunehmen, daſs man die Disjunktion aus der elementaren Einteilung (jede Kugel kann entweder *s* oder *w* sein) herleiten müsse; dann wäre sie konsequent, obwohl sie einen Denkfehler begeht; oder aber sie sucht nach Gründen in einem ähnlichen Verhalten; dann hat sie objektive Belege für ihre Hypothese herbeizuschaffen. Eine ganz lockere Analogie reicht aber zur Erkenntnis nicht aus, und so ist auch für die Mischungsverhältnisse die von Stumpf herangezogene Analogie mit dem

Wappen- und Schriftspiel in der Luft schwebend; denn dafs an jeder Stelle mit gleichem Recht *w* oder *s* erwartet werden könne, geben wir nur zu, wenn man einen ursprünglichen Vorrat von sehr vielen *s* und *w* Kugeln in gleicher Verteilung besitzt. Dann freilich braucht man nur blindlings eine Kugel nach der andern zu greifen, um den Fall Wappen und Schrift modifiziert zu erhalten, und dann erst kann man sich darüber aufs höchste verwundern, lauter Kugeln von einer Farbe getroffen zu haben. Sind also die Urnen aus einem solchen Vorrat absichtslos angefüllt worden, so sind auch die Permutationen für die Mischungsverhältnisse zu veranschlagen. Die Aufgaben, in welchen das Mischungsverhältnis nicht gegeben ist, haben ihren guten Sinn, ob man $n + 1$ verschiedene „Hypothesen" oder deren $2^n$ macht; nur will hier dies Wort in dem Sinne EUKLIDS verstanden sein. Es sind eben nur Aufgaben. Doch wird auf diesen Punkt bei Besprechung der BAYEschen Regel noch näher einzugehen sein.

Wenn man von den Übungsbeispielen ganz absieht und mit D'ALEMBERT behauptet, dafs regelmäfsige Kombinationen in der Natur weniger wahrscheinlich seien, als andere, und wenn auch D'ALEMBERT darin einen Gegensatz zur Wahrscheinlichkeitstheorie aufzudecken sucht, so liegt die Frage hier zunächst ganz anders. Bei den Exempeln der Rechnung handelt es sich immer um Anordnungen, die von Menschen herrühren. Sieht man von den Voraussetzungen der Lehrbücher ab, so wären hier eben deshalb die regelmäfsigen Kombinationen eher zu erwarten. Der Mensch liebt es, die weifsen von den schwarzen Kugeln fein ordentlich zu trennen. Wo sich allein nach der Nummer Unterscheidbares vorfindet, da dürfen wir immer mit der gröfsten Wahrscheinlichkeit darauf rechnen, dafs die arithmetische Folge gewahrt ist, und wenn sie zu unserem Verdrufs gestört ist, stellen wir sie sorgsam wieder her. Was bei STUMPF eine lediglich logische Frage ist, ergiebt sich bei D'ALEMBERT als eine naturphilosophische. Man gerät mit ihr sofort in das Gebiet der Spekulation, wenn auch jenes Urteil auf eine noch so präzise Form gebracht sein sollte.

In der Natur herrscht Kausalität und unter allen Dingen eine Wechselwirkung, ohne welche wir völlig an der Erkenntnis verzweifeln müfsten. Der Zufall, den wir innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussetzen, beruht immer auf einer Anordnung der dem Urteil unterliegenden Gegenstände — diesen Begriff im allgemeinsten Sinne als Objekt des Gedankens genommen —; ihn in

die Natur selbst zu verlegen, hieſse uns des sicheren Fundaments der Erkenntnis berauben. Gleichviel, ob wir unter Fiktion eines tendenzlosen Geschehens von dem Würfel erwarten, daſs jede Seite in einer groſsen Zahl von Fällen sich annähernd gleich oft wiederholt, oder ob wir die Koincidenz von 60 hellen Linien im Eisenspektrum mit 60 dunklen im Lichtbande der Sonne auf eine feste Ursache zurückführen, indem wir den Zufall durch seine eigenste Natur ad absurdum führen; immer handelt es sich um eine Prüfung des Wirklichen unter Bedingungen, die wir ihm vorschreiben. Indessen ist es doch nicht der Wahrscheinlichkeitsbruch, den der berühmte Naturforscher seinen Entdeckungen mitgegeben hat, der die „Grundlage" für diese abgiebt. Wenn die Koincidenz sich ihm plötzlich geboten hätte, so wäre die Bestimmung auch nicht absolut notwendig gewesen, aber sie hätte doch wohl das beobachtete Verhalten charakterisieren können. Einem Auge wie dem Kirchhoffs wäre sofort offenbar gewesen, daſs hier ein Zusammenhang bestehen müsse. Wer denkt hier nicht an eine ganze Reihe physikalischer Entdeckungen, z. B. an die Lichtenbergschen Figuren; die regelmäſsige Anordnung des Staubes auf dem Elektrophor entging seinem Blicke nicht, und mit einem Schlage wuſste er, daſs eine elektrische Erscheinung sehr wahrscheinlich anzunehmen war. Kein Wahrscheinlichkeitsbruch aber hätte ihm die Sicherheit geben können, die er erhielt, als er durch eigene Anordnung die Figuren reproduzieren konnte. Die überzeugende Kraft jedes Experiments im Vergleich zu einem ohne unser Zuthun ablaufenden Vorgange liegt darin, „daſs die Kette der Ursachen durch unser Selbstbewuſstsein hindurchläuft" (Helmholtz, Thats. d. Wahrnehmung S. 33). Wenn die Koincidenz je einer Linie sich geboten hätte, so wäre, die Rechnung mit dem Bruche $\frac{1}{2}$ für die Alternative „Zufall oder nicht" zugestanden, jede willkürliche Wiederholung geeignet gewesen, die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, und nach 60 Versuchen wäre man bei dem bekannten Werte angelangt. Aber wir nehmen nicht Anstand, die „approximative Schätzung" $\frac{1}{2}$ für die Alternative „Zufall oder nicht" selbst vom Standpunkte der logischen Theorie anzutasten, ohne auch nur im entferntesten die Kirchhoffsche Theorie der Spektralanalyse mit der leisesten Spur eines Zweifels zu betrachten. Die Disjunktion lautet: Entweder eine feste Ursache oder eine Konstellation von Ursachen, die nicht im Zusammenhange mit dem Spektrum des Eisens stehen. Woher weiſs man nun, daſs die logische Disjunk-

tion nur eine einzige Konstellation von Ursachen zuläſst, die dem andern Gliede eine feste Ursache, die auf das Eisen und seine Natur zurückzuführen ist, gleichwertig entgegenstellt? Wir haben hier durchaus einen Fall, wo der gesunde Menschenverstand für das Urteil vollständig ausreicht, und wenn der groſse Naturforscher sein Kalkul aufstellte, so galt es nur, die Zweifel zu heben, die sich der neuen und verblüffenden Thatsache gegenüber, die jetzt durch eine Fülle von Ergebnissen gestützt wird, von dem entfernten Himmelskörper etwas über seine Zusammensetzung auszusagen, wohl hätten geltend machen können. Überall aber, wo wir durch eigene Anordnung Ursache und Wirkung zur Koincidenz bringen, schlieſsen wir alle anderen möglichen Ursachen aus. Daſs hier Täuschungen möglich sind, soll nicht bestritten werden.

Jene naturphilosophische Ansicht von D'Alembert ist nichts als eine Analogie, die nach seinem Beispiel vom Würfel, der sechs gleichwertige Fälle zeigt und eben daher eine dauernde Bevorzugung eines einzelnen sehr unwahrscheinlich macht, von der Natur verlangt, daſs sie sich ähnlich verhalte. Gewiſs, wenn in der Natur ein ähnliches Verhalten durch den Gegenstand geboten wird, dann werden auch die regelmäſsigen Wiederholungen desselben Falles $\alpha_1$, der mit $\alpha_2$ bis $\alpha_6$ in Konkurrenz sich befindet, seltener sein, als die Mischungen von $\alpha_1$ bis $\alpha_6$. So wenig wir über jede Art der Fortpflanzung der Organismen wissen, so einleuchtend erscheint es uns, daſs nicht eine Zeit hindurch von den beiden gleichberechtigten Reihen männlicher und weiblicher Individuen die eine ausschlieſslich oder in Überzahl zur Geltung komme. Aber wir können von der Natur nichts a priori aussagen, das sich auf Erfahrungen oder Beurteilungen des Würfelspiels stützt.

Die Stumpfsche Auffassung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erhebt ja nicht den Anspruch einer objektiven Bedeutung in dem Sinne, daſs nun auch den Rechnungsresultaten etwas entsprechen müsse auſser der Disjunktion und ihren logischen Grundlagen. Aber sie erhebt zur Maxime unseres Denkens, daſs da, wo unser Wissen auf die Disjunktion eingeschränkt ist, die natürliche Richtschnur in der gleichen Verteilung der Individuen anzunehmen sei, die in jedem Teilungsbegriffe ihren Platz finden können. Alle Betrachtungen über die von ihren Voraussetzungen losgelösten Urnenbeispiele führen ja bei ihm auf das Schema zurück: Wenn eine Kugel nur weiſs oder schwarz sein kann, ohne daſs irgend ein

Wissen das Urteil trübt, so ist eins so wahrscheinlich als das andere. Wollen wir aber uns in Wirklichkeit darüber irgend ein Urteil bilden, so fängt hier erst die Disjunktion der Möglichkeiten, die das Urteil leiten sollen, an, ganz in dem Sinne, in dem v. KRIES sie zu entwirren sucht. Denn niemals ist diese Disjunktion das einzige, was wir wissen, und wenn es dennoch so sein sollte, so wäre es ein „Spiel des Witzes“, mit jener Gröſse $\frac{1}{2}$, wofern wir sie nicht als Versteinerung unseres Zweifels aufbewahren, auch weiter zu rechnen. Ich kann durchaus nicht einsehen, daſs sich der Fall dieser Kugel von dem Urteilsgegenstande unterscheidet, über den LOTZE sich in einem etwas andern Zusammenhange in folgender Weise belustigt: „Bevor irgend etwas sei, habe es gleiche Wahrscheinlichkeit, daſs überhaupt etwas sei, und daſs gar nichts sei; eines ven beiden müsse aber stattfinden; folglich sei die Wahrscheinlichkeit für das Dasein von etwas überhaupt $= \frac{1}{2}$; dies Daseiende müsse dann entweder nur eines oder vieles sein, mithin die Wahrscheinlichkeit für das Dasein vieler Elemente $= \frac{1}{4}$, ebenso groſs die für das Dasein eines einzigen; endlich, wenn wir annähmen, es gebe $n$ Elemente, so können sie entweder alle gleich oder alle oder einige verschieden sein; unter den $m$ Fällen, die hieraus entständen, würde die Gleichheit aller nur einer sein, folglich ihre Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{4}\,m$.“ Warum sollte eine „reine Intelligenz“ nicht so urteilen dürfen?

Uns lag daran, zu zeigen, daſs die gleichwahrscheinlichen Fälle in den Beispielen immer auf eine mathematische, gegebenen Falls physikalische Gleichheit in allerschärfster Bedeutung sich stützen müssen, daſs die logische Gleichheit einen völlig andern Sinn hat, daſs ferner die Analogie, welche die Abzählbarkeit der Disjunktionsglieder und die an sich zulässige Kombination mit fiktiven Einheiten behauptet, eben nichts mehr als eine Analogie ist, die aber so deutlich auch die Differenzen der Betrachtung aufzeigt, daſs man sie in der Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung durchaus eher zu meiden als zu betonen alle Ursache hat.

Wenn in Wirklichkeit eine Urne gegeben ist, die Kugeln enthält, welche gezogen werden sollen, so stellen wir an die Übereinstimmung der Individuen die höchsten Anforderungen. Feine Gröſsendifferenzen werden von der tastenden Hand nicht leicht bemerkt werden, aber jeder physikalische Unterschied in der Oberfläche, Gewichtsabweichungen u. dgl. würden leicht empfunden und geeignet werden, das Urteil irgendwie zu dirigieren, so daſs auch

der Griff in die Urne eine mehr oder minder bestimmte Richtung annehmen müfste. Wenn ein geschickter Taschenspieler eine Karte ziehen läfst, so ist für den Zug die Freiheit der Hand und also auch unser Wahrscheinlichkeitsurteil angesichts der carte forcée zu inhibieren, sofern nicht auf die Freiheit des Kartenkünstlers, eine beliebige Karte zu produzieren, zurückgegangen ist. Das verändert, wie man leicht einsehen wird, die ganze Aufgabe. Das Ziehen der Karte fällt aus den Bedingungen überhaupt heraus. Jene scharfe physikalische Übereinstimmung ist nun lediglich eine Bedingung des Spiels, da sie ja in der Natur fast niemals, sondern nur auf Grund willkürlicher Anordnungen herzustellen ist. Wir haben aber ein Mittel, von ihr ganz abzusehen, wenn wir durch ein nach allgemeiner Meinung völlig bedeutungsloses Merkmal eine Gleichheit herstellen, die ganz und gar nichts mit den Vorgängen, die in Frage stehen, zu schaffen haben kann. Nicht dafs nicht auch jene absolute Gleichheit, auch wo sie nur fingiert werden kann, zur Unterlage von Wahrscheinlichkeitsurteilen gemacht würde. Beobachtungen, die verschiedene Resultate aufweisen, werden niemals verarbeitet, weil man von ihrer Herkunft nichts weifs, sondern weil man ihrem Ursprung die gleiche Wertschätzung entgegenbringt. Man denke nur an die persönlichen Fehler, mit denen man ein Nivellement zunächst zu bewirken sich bemüht. Aber wenn man ein ganz indifferentes Merkmal, wie die Zahl oder den Namen, etwas rein Formelles, zum Einteilungsgrunde wählt, so wird das, was der Wahrscheinlichkeitsrechnung unterliegt, in durchaus rationeller Weise geschaffen. Wofern man in Deutschland statistische Untersuchungen auf alle Einwohner, die den Vornamen Karl oder Anna haben, beschränkte, so dürfte man sicher sein, ein Bild zu erhalten, das auch den Gesamtverhältnissen entspricht. Nur dann, wenn uns durch die absolute Erkennbarkeit des — sagen wir gerade heraus — Zufalls jene Gleichgültigkeit des Geschehens gewährleistet wird, sind wir auch in der Lage, der Zahl allein eine Rolle im Geschehen zuzusprechen, wie sie implicite im Urteil ausgesagt wird, das in unserem Urnenbeispiel (S. 62) die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{10}{30} \text{ und } \frac{20}{30}$$

behauptete. Wir scheuen uns, auszusprechen, dafs so der Zufall zum Erkenntnisprinzip erhoben werden kann, weil diesem „proteusartigen Gesellen", wie Windelband sich ausdrückt, die verschiedensten Bedeutungen zugesprochen werden. Aber wenn die Be-

schreibung unseres Verhaltens innerhalb der Wahrscheinlichkeitsdisziplin richtig gewesen ist, so glauben wir auch, dafs die citierten Worte von Laplace:

„mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres“

keinen andern Sinn haben können, als eben jene völlige Beziehungslosigkeit zwischen dem Einteilungsgrund und dem, was wirklich geschieht, herzustellen, dafs zunächst bei Zahlengleichheit der unterschiedenen Fälle ein jeder mit gleichem Recht wirklich gewesen sein, wirklich sein oder werden kann, während bei verschiedenem Zahlenverhältnis unser Urteil eben nur durch dieses abgeändert wird. Hier ist der Einteilungsgrund die Farbe der Kugeln, das Geschehen der Zug einer Kugel oder überhaupt die räumliche Anordnung, wann sie auch vorgenommen worden ist; dort ist er die Seite des Würfels, sofern sie vor keiner andern etwas voraus hat, das Geschehen der Wurf, und wenn wir irgendwo durch Nummern verzeichnet zweimal je 1000 Menschen wüfsten von gleichem Gesundheitszustand, von gleichem Alter u. s. w., kurz, wenn wir ihnen die Fiktion absoluter Übereinstimmung in gewisser Hinsicht überwerfen, so sind wir berechtigt, zu sagen, dafs die Wahrscheinlichkeit für Nr. 875, gestorben zu sein, gröfser ist, als für Nr. 1875, wenn nach einer gewissen Zeit aus dem ersten Tausend 30, aus dem zweiten 20 Todesfälle gemeldet wurden, und wer sich mit uns über die Rechnung geeinigt hätte, würde sofort mit den Zahlen 0.03 und 0.02 operieren. Nur vergesse man nicht, dafs wir es sind, die in den beiden willkürlichen und bedeutungslosen Nummern den Zufall geschaffen haben, und dafs nicht der natürliche Vorgang gemeint ist, den wir mit dem Urnenspiel vergleichen.

v. Kries thut der alten Lehre unrecht, indem er in den mathematischen Aufgaben mehr sieht, als sie geben wollen. Bei ihm, der die Einübung der Theorie, die mit der Definition des Begriffs fast erschöpft ist, an Beispielen, die nicht immer gut gewählt sind, mit der Praxis zu verwechseln scheint, drängt die naturwissenschaftliche Art des Denkens fast auf eine Physik des Zufalls hin. Wenn er am Schlusse seines Buches den Vorschlag macht, „die Anwendung der Wahrscheinlichkeitssätze auf die realen Zufallsspiele ausdrücklich nicht als unmittelbar logisches Ergebnis unserer Ungewifsheit, vielmehr als Satz von realer Bedeutung, als Hypothese“ einzuführen, so weifs ich nicht, was eigentlich der Gegenstand dieser Hypothese sein soll. Kein Wahrscheinlichkeitsurteil

sagt etwas aus, das an irgend einer Hypothese aus der Disziplin selbst ein Interesse hätte. Der Zufall ist streng genommen keine Hypothese, sondern eine Zuflucht, weil uns die Erklärung mangelt. Er ist das schlechthin Unerklärbare, sofern wir das Knäuel der Ursachen und Wirkungen, die Niemand leugnet, durch keine Analyse zu entwirren vermögen, und dies allein macht den Begriff so schwierig, weil wir ihm nur durch Illustrationen beikommen können. Nie rückt er uns um ein Haar näher. Physikalische Erscheinungen können doch immer auf einfachere Vorgänge reduziert werden; der Zufall wird von einer Analogie zur andern geworfen, ein Unerklärliches auf ebenso Unerklärliches scheinbar zurückgeführt, und wenn wir in der physikalischen Untersuchung keine letzte Ursache finden können, so ist es doch wenigstens ein festes Prinzip, die Kausalität, das wir als Notanker auswerfen, den wir aber in die Höhe winden müssen, um uns steuerlos auf dem Meere des Zufalls herumzutreiben. Denn die Theorie des Zufalls ist kein Steuerruder, allenfalls ein Kompafs, der nur zeigt, wohin die Strömung uns führt. Auch das sinnreiche Spiel, das sich v. Kries ausgedacht hat, erklärt nichts, sondern illustriert nur. Es ist gar nicht anders, als die anderen alle. Wenn wir uns auch nicht auf die Ungewifsheit allein berufen, so ist sie doch immer mitbeteiligt, weil sonst von Wahrscheinlichkeit gar nicht die Rede sein kann, und dafs ein logisches Verhalten unseres Verstandes und nichts anderes unser Urteil leitet, ist zweifellos, aber da es sich in dem ganzen Gebiete nirgends um elementare Denknotwendigkeiten, sondern nur um eine Übereinkunft handelt, so genügt es vollkommen, diese einzuhalten, keine Verträge zu schliefsen, welche sich von ihrer Basis entfernen, um nicht zu Unzuträglichkeiten zu kommen. Stumpf hinwiederum will den festen Boden, den die Mathematik verlangt, verlassen, indem er eine Kombinatorik der logischen Möglichkeiten im äufsersten Falle mit der Berechnung gleichwahrscheinlicher Fälle zu identifizieren im Namen der Logik verlangt. Hier liegt eine Gefahr, weil kein Zweifel darüber obwalten kann, dafs bei Gröfsenbestimmungen, die kein Erfolg umzustofsen vermag, die vorsichtige Beschränkung allein und die schärfsten Ansprüche an die Polizei der in der alten Auffassung enthaltenen Voraussetzungen vor völlig leeren Untersuchungen bewahren können. Das „ex nihilo nihil fit" sieht sich auf einmal von einer Seite überwunden, die sonst sehr ungnädig mit den Nichtsen umging. Ich weifs etwas und kann es in die Form einer guten

Disjunktion bringen. Nun überzeuge ich mich [„zuerst also muſs die Gleichmöglichkeit erkannt sein"], daſs ich absolut nicht weiſs, welches Glied der Disjunktion auszusagen ist; ich nehme also die möglichst vollkommene Unwissenheit, und flugs wird aus dem unbedingt gleichwertigen Zweifel eine positive gleichwertige Wahrscheinlichkeit. Zuerst hören wir, daſs bei der Definition eines in der Wissenschaft bereits eingebürgerten und in wichtigen Sätzen angewandten „Ausdrucks" der Sinn so wiederzugeben sei, „daſs er genau die Merkmale bezeichnet, aus denen die Konsequenzen in Wirklichkeit gezogen wurden"; dann wird mit Rücksicht auf die Abstammung des Begriffs beansprucht, daſs die Konsequenzen nicht zu unerträglichen Abweichungen vom gemeinen Menschenverstand führen dürfen, treten aber Zweifel auf, so wird wiederum auf die Definition zurückverwiesen (S. 89). „Bei jeder Wahrscheinlichkeitsbestimmung müssen diejenigen Umstände, über welche wir uns disjunktiv in völliger Unwissenheit befinden, als unbeschränkt variabel (bezw. bei gleichzeitiger Vielheit der Fälle als unbeschränkt verschieden) vorausgesetzt werden dürfen. Dies liegt im Begriffe der Wahrscheinlichkeit, wie er in I definiert wurde; denn bei der geringsten Vermutung über Konstanz eines solchen Umstandes hätten wir nicht mehr gleichmögliche Fälle im Sinne gleicher, d. h. absoluter Unwissenheit." Warum dürfen wir bei völliger Unwissenheit alle Fälle, die in Frage stehen, als unbeschränkt variabel voraussetzen? Weil es die Definition vorschreibt. Und warum schreibt es die Definition vor? Weil wir absolut nichts über den in Frage stehenden Fall wissen. Aus diesem Zirkel kommen wir nicht heraus.

Giebt man die Definition zu, so wäre zu entscheiden, was sich damit anfangen läſst. Zunächst ist sie geeignet, die herrschende Unklarheit zu vermehren. Sie kann eine mathematische Lehre vom disjunktiven Urteil begründen, an der sich die Kombinatorik so gut üben kann, wie an allen anderen völlig unbestimmten Elementen. Was gemessen oder richtiger gezählt wird, sind Möglichkeiten, deren eine jede wieder soviel der Rechnung entschlüpfende Fälle enthalten wird, als Gelegenheit zur Verwirklichung geboten werden kann. Daſs in den mathematischen Folgerungen Unzuträglichkeiten liegen können, ist unmöglich, da die Mathematik unfehlbar ist; nur wollen alle Rechnungsresultate gedeutet sein an der Hand des definierten Begriffs, der mit der Wahrscheinlichkeit nur das gemein hat, daſs alle ihre Urteile auch jenem Formalismus anheimfallen; nur darf man die Sache nicht umkehren. Es ist eine Verall-

gemeinerung, ohne Zweifel, aber mit den Eierschalen, die abgestreift sind, so fürchte ich, sind eben die wesentlichen Merkmale mit verloren gegangen, die das (zahlenmäfsig) Wahrscheinliche von dem (zahlenmäfsig) Möglichen, wie es die Gliederzahl der Disjunktion angiebt, zu trennen vorschreibt. Wenn es nicht mehr wesentlich ist, dafs man die individuellen Fälle übersehen kann — ob sie mittelbar oder unmittelbar gegeben sind, ist ja völlig gleichgültig —, so soll man sich nur hüten, in gleicher Weise Mafsnahmen auf diese Rechnungsmethode zu basieren, wie das angesichts des älteren Begriffs wenigstens möglich wäre. In der historisch gegebenen Entwicklung der Disziplin spricht allerdings ein Moment für die Auffassung, die wir als die logische bezeichnet haben. Es sind die Erörterungen, die sich an die Unvollkommenheiten der Münzen, Würfel u. s. w. knüpfen. Für Poisson ist diejenige Wahrscheinlichkeit die abstrakte, die aus der Natur des Würfels oder der Münze folgt, mit denen gerade geworfen wird; jene, die wir a priori zu nennen pflegen, ist ihm nur subjektiv. Ob er daran gedacht hat, dafs ein Würfel auch nur ein beliebiger 6seitiger Körper sein könne, von dem man nur weifs, was in dieser Angabe enthalten ist, mag dahingestellt bleiben. Wenn in neuester Zeit Bertrand schreibt:

„.... On parie, en jetant un dé, qu'il montrera le point 4. Le dé a six faces: six cas sont possibles, un seul est favorable. La probabilité est $\frac{1}{6}$. C'est une definition",

so kommt ihm, der auch hin und wieder eine Frage stellt, die er nachher als „mal posée" bezeichnet, dieser Gedanke gar nicht.

Poissons Unterscheidung verliert ihre Bedeutung, da die Kenntnis einer noch so umfangreichen Versuchsreihe einen exakten Schlufs auf die Beschaffenheit des benutzten Objekts niemals zuläfst; es spielen dabei immer auch die vorgenommenen Manipulationen ihre Rolle. Es ist immer derselbe Konflikt, der den Lehrbüchern Schwierigkeiten macht, und der völlig beseitigt wird, wenn man sich die Freiheit nimmt, in mathematischen Aufgaben von den Unvollkommenheiten der Objekte, von dem „schädlichen Raum" (S. 56) einmal ganz abzusehen. Die Friessche Kritik, die wir durchaus nicht „hyperkritisch" nennen möchten, trifft auch hier wie in so vielen Punkten das Richtige (a. a. O. S. 29): „Dabei beruht die rein mathematische Theorie auf den Grundbegriffen „gleichmöglicher Fall" und „mathematische Wahrscheinlichkeit". Da darf nun für die Anschauung nicht vergessen werden, dafs dieser Begriff von den gleichmöglichen Fällen eine mathematische Abstraktion bleibt, welche

der Erfahrung nie genau entspricht, ähnlich dem, wie man in der Naturlehre bei den Gesetzen des Stofses die Voraussetzung ganz elastischer und ganz unelastischer Körper macht, um die ersten Formeln zu bestimmen." Ich lasse mir noch gefallen, dafs bei einem Würfel, den man als einen völlig normalen herzustellen die Absicht hatte, die kleinen Verschiedenheiten, die man nicht beseitigen kann, dem Zufall in die Schuhe geschoben werden, aber mit der Möglichkeit, dafs bei einem ganz unregelmäfsigen 6seitigen Körper eine gleiche Wahrscheinlichkeit jeder Seite behauptet werden könne, weifs ich keinen Sinn zu verbinden. Diejenige Seite, welcher der Schwerpunkt am nächsten liegt, wird am häufigsten in der Ruhelage die Grundfläche abgeben, während es überdies zweifelhaft erscheinen mufs, dafs überhaupt eine Fläche in unzweideutiger Weise sich als oben liegend ergiebt. Die Aufgabe kann hier nur die sein, die Wahrscheinlichkeit eben jener meistbegünstigten Seite zu bestimmen; sie ist eine fundamental andere. Die eine Seite konnte ebenso gut mit dieser Zahl als mit jeder andern versehen werden, wie der Taschenspieler bei „carte forcée" diese Karte wählen konnte, wie jede andere. Darin liegt die absolute Gleichheit der Fälle für das Urteil.

Die logische Theorie hat einen Vorzug, den wir ihr nicht abzustreiten vermögen; sie ist fast im mathematischen Sinne elegant zu nennen. Sehr schön, aber sie hält nicht stand gegenüber dem Ansturm logischer Notwendigkeit. Weit entfernt, vallo fossaque munita ihre Herrschaft zu behaupten, sieht sie sich überdies genötigt, eine grofse Pforte zu bauen, aus der ihr wesentlicher Inhalt wieder herausgetragen wird: Es darf nicht die geringste Vermutung über die Konstanz eines Umstandes vorhanden sein. Wann ist diese Anforderung je erfüllt?

Eine Frage wird noch bei den Erörterungen über gleichwahrscheinliche Fälle zu erledigen sein. Wie wird man sich zu verhalten haben, wenn nicht diskrete Zahlen gegeben oder ableitbar sind, die das disjunktive Urteil begründen, sondern stetige Gröfsen mit in die Erwägung eintreten? Um ganz strenge zu verfahren, müssen wir hier zunächst noch einmal die Setzung der Wahrscheinlichkeit 0 diskutieren, auch wenn es sich um diskrete Fälle handelt. Wir haben in ihr das Symbol der Unmöglichkeit gesehen. Wenn eine Urne notorisch einen Gegenstand nicht enthält, so können wir ihn auch nicht aus derselben entnehmen. Auf die Spitzfindigkeit, ein unbemerktes Einschmuggeln, das möglich ist, mit zu berück-

sichtigen, braucht man sich nicht einzulassen; wo ein Fall unmöglich ist, da ist seine Wahrscheinlichkeit $= 0$. Praktisch ist diese Grenze völlig bedeutungslos; wenn wir einen noch so kleinen angebbaren Bruch haben, können wir ihn immer noch markieren; und für unser Urteil giebt er eine hinreichende Direktive. Ob es auf so feine Unterschiede noch reagieren wird, kann man ganz dahingestellt sein lassen. Kirchhoffs Koincidenzen von 60 Linien im Eisen- und Sonnenspektrum sind durch die neuere Forschung auf 240 erhöht; wenn die Zahlen $\frac{1}{2^{60}}$ und $\frac{1}{2^{240}}$ richtig wären, so bedeutete doch die Differenz ganz und gar nichts. Selbst wenn zwei Fälle, für deren einen wir uns im Urteil entscheiden müfsten, mit diesen Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, wäre es eine leere Affektation, den mit der gröfseren Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{60}}$ zu bevorzugen. Mein Auge reagiert noch auf den Unterschied, mein Urteil nicht. Ob man aus $2^{60}$ Kugeln oder aus $2^{240}$ Kugeln eine bestimmte zufällig herausgreifen soll, wird wohl vielen Menschen gleichgültig sein. Wichtig ist nur die Grundlage, auf der der ganze Bau ruht; ob man im einzelnen an der Übereinkunft sich beteiligen oder von ihr Gebrauch machen will, mufs jedem überlassen werden.

Von einer noch so geringen Wahrscheinlichkeit zu ihrer Negation übergehen, heifst einen Sprung machen, wenn kein Fall gegeben oder der einzige, der noch möglich war, beseitigt ist. Anders wird es, wenn die Zahl aller möglichen Fälle unendlich werdend zu denken, die der günstigen aber endlich ist. Hört hier die Wahrscheinlichkeit auf oder nicht? Ich gestehe, dafs ich mir keinen Fall ersinnen kann, welcher hierauf scharf pafste und nicht zu einer Ungereimtheit führte. Eine unendliche Zahl von weifsen Kugeln, unter welchen sich 100 oder 1000 oder wer weifs wie viel rote in endlicher Zahl vorfinden, giebt es nicht, und wenn es sie giebt, werde ich die Frage nach dem Zug einer roten Kugel nicht aufwerfen.

Morgen werden sich unermefslich viele Einzelvorgänge abspielen, die im Weltlauf den Charakter des Zufälligen tragen. Ob sich darunter auch der befindet, dafs sich mein Freund Müller in New York und mein Freund Schulze in Kapstadt, die beide viel auf Reisen sind, unter den Linden in Berlin zufällig begegnen — wer wollte so fragen? Also man kann diesen Fall getrost seinem Schicksal überlassen, und wer einmal in der Wissenschaft genötigt sein sollte,

sich mit ihm zu befassen, der mag des längeren auseinandersetzen, wie er ihn zu behandeln gedenkt.

Anders wird die Sache nur scheinbar, wenn man es mit solchen Beispielen zu thun hat, die nicht auf arithmetische, sondern auf geometrische Betrachtungen zurückzuführen sind. Wofern eine kreisförmige Scheibe von Kugeln getroffen werden soll, die ganz zufällig — man kann sich einen Apparat dazu in der mannigfaltigsten Weise ersinnen — die Scheibe in diesem oder jenem Punkte berühren, so wird man nicht etwa einen bestimmten Punkt bezeichnen und nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daſs dieser gerade getroffen wird und kein anderer. Daſs aber, wenn irgend welche Begünstigung einer bestimmten Stelle oder mehrerer oder eines oder mehrerer Bezirke ausgeschlossen erscheint, eine gröſsere Fläche eine gröſsere Wahrscheinlichkeit hat, getroffen zu werden, und wenn ferner die Kugeln auf irgend einem Punkte auftreffen müssen, alle früher angestellten Betrachtungen sich mit den durch geometrische Verhältnisse bedingten Modifikationen wiederholen lassen, ist gewiſs. Auch hier sind viele Fälle denkbar, in denen unser Urteil lediglich auf Gröſsenverhältnisse angewiesen ist. Die LANGEschen Versuche, die Wahrscheinlichkeitssätze an geometrischen Bildern zu demonstrieren, haben wir bereits erwähnt. Sie sind nichts mehr als Illustrationen, von denen die analytische Behandlung uns befreit; denn die Rechnungsoperationen sind überall dieselben, wie sie von der Mathematik überhaupt verwandt werden. Die Kombinatorik ist mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung und an ihren Beispielen emporgewachsen, aber sie selbst hat sich inzwischen zu einer ganz allgemeinen Beweismethode in der Mathematik herausgebildet. Wer das Produkt

$$(a + b + c)(e + f + g)$$

herstellen will, kann in verschiedener Weise am Resultat interessiert sein, je nachdem er nur nach seiner Gröſse oder nach der Art seiner Zusammenstellung fragt. Es ist also wesentlich die Fragestellung, die einen Unterschied bedingt, aber die allgemeine Rechnungsart, die wir Multiplikation nennen, bedarf der Herstellung der Variationen der Elemente des Produkts, um einen allgemeinen Satz, eine Vorschrift für dessen Bildung zu gewinnen. Überall nun, wo stetige Gröſsen ins Spiel kommen, erhalten die allgemeineren analytischen Methoden die Bedeutung einer unbeschränkten Anwendung; sie haben sich, ausgehend von kombinatorischer Grundlage, durch Festsetzungen von der Einschränkung freigemacht,

nur mit wirklich abzählbaren, diskreten Elementen zu rechnen. Es würde daher nicht verwunderlich sein, wenn man heutzutage den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit sofort an der Hand der allgemeinsten Gröfsenbeziehungen herleiten würde, so dafs man mit einem Schlage einen jeden besonderen Fall mitberücksichtigt hätte. Die Disziplin selbst hat sich unter der Hand der Mathematiker weiter entwickelt, indem sie sich an der Basis, welche die Definition von den gleichwahrscheinlichen Fällen und des ausschlaggebenden Verhältnisses der günstigen zu allen möglichen Fällen der Rechnung gab, genügen liefs und die Verallgemeinerung auf die Berücksichtigung stetiger Verhältnisse ohne ein Wort der Rechtfertigung vornahm. Dagegen ist auch wenig einzuwenden, sofern man immer nur den Sinn der Übereinkunft, die durch die Definition geschlossen ist, nicht aus dem Auge verliert. Und diese sagt nichts anderes, als dafs wir für irgend ein disjunktives Urteil, dessen sämtlichen Prädikaten quantitative Attribute zugehören, jene beiden Definitionsgleichungen ansetzen dürfen, wofern eben alle Gründe unseres Urteils durch jene Gröfsenbestimmungen erschöpft werden. Dann stehen wir auf mathematischem Boden und können alle seine Pfade begehen, so dafs im Grunde besondere Überlegungen völlig überflüssig werden. Prinzipiell haben wir uns nur zu hüten, für den Fall, den wir oben als ohne praktische Bedeutung bezeichneten, und bei dem es sich um einen Punkt handelte, der von einem räumlich abgegrenzten Gebiet wie alle seine Nachbarn getroffen werden konnte, auszusagen, dafs die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\infty} = 0$ sei. Aber mathematischen Prinzipien wäre das nicht zuwider; vielmehr sollen uns die Bedingungen der Festsetzung davor bewahren, für etwas immerhin Mögliches das Symbol der Null zu verwenden.

Es ist nun hier der geeignete Ort, auf die v. Kriessche Darstellung hinzuweisen, die es in der That unternimmt, das ganze Wahrscheinlichkeitsproblem auf eine Grundlage zu stellen, welche wesentlich in räumlichen Beziehungen ihre Bausteine sucht. In der Kritik, die v. Kries gegen die bisher üblichen Beispiele übt, können wir ihm nicht zustimmen. Uns sind sie nichts als Konstruktionen, die nach ihren Voraussetzungen beurteilt werden wollen. Eine schärfere Betonung dieses Charakters in den Lehrbüchern wird einerseits immer daran erinnern, dafs es sich um formale Beziehungen handelt, die nicht an der Hand abweichender realer Verhältnisse untersucht werden, sondern die das Rechnungs-

verfahren einüben sollen, und andererseits wird dadurch die Meinung zu bekämpfen sein, daſs man es mit einem Hülfsmittel von allgemeinster logischer Bedeutung zu thun habe. Die Theorie der Möglichkeiten wird uns dann nicht mehr glauben machen können, daſs immer, wenn die Kenntnisse fehlen, ein Wahrscheinlichkeitsbruch sich einstellen müsse. Wenn Jemand aber auf Grund bestimmter Überzeugungen angiebt, daſs für ihn die Wahrscheinlichkeit eines Urteils auf einen bestimmten Wert geschätzt werde, so macht er von einer Analogie Gebrauch, die Jedermann verständlich sein wird. Auch von der Objektivität des Verfahrens braucht man nicht abzugehen; indessen ist ja auch eine jede objektive Schätzung inexakt, und wenn die Analogie mit den Beispielen zugegeben wird, so giebt das dem Urteil einen bestimmten Sinn, aber doch nicht den, daſs dieselben Voraussetzungen in aller Vollkommenheit auch konstatiert wären. Der Hebel ist dann beim wissenschaftlichen Gebrauch anzusetzen. Jede Disziplin, die von der Wahrscheinlichkeitsrechnung Nutzen ziehen will, hat nachzuweisen, daſs sie wirklich objektive Daten im Sinne der Schemata für das Wahrscheinlichkeitsurteil mitbringt; es genügt nicht, daſs der allgemeine Begriff des Wahrscheinlichen dazu verleitet, auch mit dem besonderen Fall einer mathematischen Bestimmung zu operieren. Wenn der historischen Kritik zwei Dokumente vorliegen, die, an ganz verschiedenen Orten aufgefunden, bei wesentlich verschiedener Form denselben Denkinhalt aufweisen, so wird sie dem Zusammenhang nachzuspüren haben, nicht aber mit mathematischer Evidenz aussprechen dürfen, daſs die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ sei, daſs hier ein Zufall, will sagen völlige Unabhängigkeit der Verfasser voneinander, anzunehmen sei. Auch in den Disziplinen, die lediglich auf zahlenmäſsige Bestimmungen angewiesen sind, wird man sich nicht mit der lockeren Analogie begnügen dürfen, sondern man wird prüfen müssen, ob der ganze Inhalt der Zahlenangaben geeignet ist, den Kalkul der Wahrscheinlichkeit auch anzuwenden. Die Bedürfnisfrage muſs sich notwendig mit der nach der Brauchbarkeit und Berechtigung decken. v. Kries stellt Fragen auf, die Niemand ernstlich behandeln würde. Ob Eisen auf dem Sirius sei oder nicht, zu fragen, hat ohne die spektralanalytischen Untersuchungen oder ohne die Diskussion eines Zusammenhangs innerhalb einer kosmischen Einheitlichkeit ganz und gar keinen Sinn. Wer die Frage aufwirft, wie wahrscheinlich es sei, daſs eine Kugel auf eine begrenzte, in 5 Teile, $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, zerlegte Ebene auffalle und den Teil $c$ treffe, hat sich auf die Gegenfrage gefaſst zu machen: wie groſs sind diese Teile, und hängt

denn nach dem Stande des Wissens unser Urteil über das Auffallen lediglich von der Gröſse dieser Teile ab? Wollen zwei Personen auf *c* und dagegen wetten, die über alles in Unkenntnis sind, so ist die Bestimmung 1:4 für den Einsatz ganz gewiſs richtig, denn alle Chancen, die mit der Wahl eines Teils verknüpft sind, geben für die vier anderen das Vierfache, die extremen Fälle, daſs wirklich die gleiche Wahrscheinlichkeit für alle 5 Teile existiere, oder daſs nur ein bestimmter Teil getroffen, alle anderen in Wirklichkeit notwendig ausgeschlossen werden müssen, mit inbegriffen. Die gerechte Verteilung der Chancen giebt aber nimmermehr ein Recht, von der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ und $\frac{4}{5}$ zu sprechen, daſs die Kugel *c* trifft oder nicht. Oder man müſste mit Poisson abstrakte und Wahrscheinlichkeit schlechthin voneinander scheiden, wo die letztere nur „in Beziehung auf eine gewisse Person", also keinerlei objektive Bedeutung hätte. Diese Fragestellung von v. Kries haben wir in einer unbedeutenden, von Stumpf vorgenommenen Modifikation wiedergegeben, der in ihr eine innere Absurdität findet, weil wir bei jedem Kontinuum faktisch wissen, „daſs jeder seiner Teile wieder Teile hat, und so ins Unendliche", und diese Eigenschaft „im Begriffe des Kontinuums liegt". Stumpf ändert nun das Beispiel, das wir näher erörtern wollen, noch weiter ab. „Eine begrenzte Ebene sei in 5 Bezirke geteilt, über deren relative Gröſse wir nichts wissen (oder sogar wissen, daſs sie ungleich groſs sind); jeder Bezirk bilde aber den Eingang eines mit einem Buchstaben *a*—*e* bezeichneten Beutels. Wie wahrscheinlich ist es, daſs eine Kugel, von der wir lediglich wissen, daſs sie von oben her in der Ebene auftrifft, und daſs sie nicht zu groſs ist, um in irgend einen der Beutel zu fallen, sich in einem bestimmten Beutel, z. B. *c*, finden wird? Hier liegt in der Frage keine Absurdität, weil das Kontinuum von Teilen in ein Diskretum verwandelt ist. Auch hier wissen wir freilich, daſs jeder Teil der Ebene wieder Teile enthält, aber es werden nur solche als verschieden gezählt, die zu verschiedenen Beuteln gehören, und dieser sind nicht mehr und nicht weniger als 5. Es ist überhaupt nicht mehr nach Teilen der Ebene, sondern nach Beuteln gefragt." (S. 70.)

Also wenn man die Teile gehörig eingrenzt, so wird nicht mehr eine unmögliche Beschränkung unseres Wissens verlangt? v. Kries hatte das Beispiel dadurch ad absurdum geführt, daſs er für eine beliebige andere Einteilung einen andern Wahrscheinlichkeitswert erhalten könne, und die lediglich auf unserer Unkenntnis beruhende Einteilung als ganz willkürlich verworfen.

Das ist zutreffend; nur wird hier eine Aufgabe diskutiert die auch nach dem Begriffe von LAPLACE eine ganz unmögliche ist. Dafs die Beutel die Sache nicht anders machen, wird Jedermann einsehen; es ist ja immer dieselbe Frage. Und wenn wir nun, anknüpfend an den von STUMPF erhobenen, völlig zutreffenden Einwurf, dafs man mit dem Begriff der Ebene auch sofort den der Teilbarkeit habe, fragen: Liegt es denn nicht auch im Wesen des allgemeinen Begriffs, dafs er sich immer wieder logisch spalten läfst, bis er auf die logische Einheit zurückgeführt ist, die nur Individuelles — einen einzigen Gegenstand — als ihren Umfang besitzt? Wenn ich also eine Disjunktion verschiedener, begrifflich noch so scharf geschiedener Fälle habe, über die ich in völliger Unwissenheit bin, wer sagt mir denn, dafs die Koordination dieser Fälle durch eine weiter gehende Einteilung notwendig aufrecht erhalten werden müfste? Wenn aus dem Begriffe des Kontinuums die Absurdität der obigen Fragestellung folgt, so ist jede Frage nach der mathematischen Wahrscheinlichkeit auf Grund einer Disjunktion, welche die völlig exakte quantitative Bestimmung der Prädikate vermissen läfst, derselben Konsequenz verfallen. Wenn immer, wo ein Zweifel sich geltend macht, der keinerlei reale Beschwichtigung findet, für jede Möglichkeit auf der einen Seite eine andere erdacht wird, die ihr für unser Urteil die Wage hält, warum soll dann nur die räumliche Einteilung eine Ausnahme machen? Ich begreife nicht, dafs man vom Standpunkte der Theorie, die mit der Disjunktion und der Prämisse „Anerkennung völligen Nichtwissens über die einzelnen disjungierten Glieder“ die mathematische Wahrscheinlichkeit aufbaut, gerade hier „eine unmögliche Beschränkung des Wissens“ feststellt, weil es sich um ein mathematisches Gebilde handelt, dem nur Gröfse zukommt, während doch in jedem andern Beispiele noch eine ganze Reihe von Momenten — aufser der Gröfse des Umfangs — denkbar sind, die die Wahrscheinlichkeit zu verändern in der Lage wären.

v. KRIES wird durch die geometrischen Beispiele bewogen, ein Prinzip der Spielräume aufzustellen, dem er eine über die Wahrscheinlichkeitsrechnung erheblich hinausgehende Bedeutung beimifst, während hier nur die Frage zu erörtern sein wird, ob ein Bedürfnis für ein solches Prinzip vorliegt, und ob auch diese Bezeichnung aus der Sache zu rechtfertigen ist.

Schon die mehrfach citierten Worte von LAPLACE über die gleichwahrscheinlichen Ereignisse:

„Mais rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres"

könnten nahe legen, nach einer allgemeinen Formulierung der Bedingungen zu streben, die einen logischen Effekt derart ergeben, dafs wir keinen Grund haben, ein Urteil vor einem andern zu bevorzugen. Ein Prinzip des mangelnden Grundes aufzustellen, würde weiter nichts besagen, als eine tautologische Umschreibung für die Voraussetzung gleichwahrscheinlicher Fälle, die den Rechenstift in Arbeit versetzen können. Als Prinzip bezeichnet wäre es das Lichtenbergsche Messer ohne Klinge, dem der Stiel fehlt, und mit einem positiven, seinem Namen widersprechenden Inhalt versehen wäre es eine Erschleichung des ganzen Inhalts der Lehre, denn alles kann sich nur um die Frage drehen: Wann haben wir Grund, einen Fall für so wahrscheinlich zu halten als den andern? Eben hierfür müssen wir nach positiven Merkmalen uns umsehen. In der Unkenntnis allein kann überhaupt kein Fundament, nicht für eine Gleichsetzung im logischen und noch weniger im mathematischen Sinne liegen. Sie bringt uns aus dem Reiche der Möglichkeiten, das auf allgemeinsten Erkenntnisprinzipien sich aufbaut, nicht über die Disjunktion und ihren Inhalt hinaus. Das Urteil:

Eine Primzahl kann eine gerade oder eine ungerade Zahl sein

giebt eine gute Disjunktion koordinierter Glieder, aber der Umfang des einen Begriffs ist unendlich, der des andern enthält nur ein Individuum, die Primzahl 2. Dafs es sich ähnlich bei jeder Disjunktion verhalten kann, sofern sie mein ganzes Wissen ausmacht, hindert an einer logischen Gleichsetzung der Möglichkeiten, wenn dieser Ausdruck überhaupt erlaubt sein sollte. Der Hinweis auf die Wirklichkeit kommt ja zunächst gar nicht in Frage, sondern lediglich die Umfangsverhältnisse der koordinierten Begriffe. Dafs aber diese zunächst gar keine Bedeutung haben, lehrt wieder obige Disjunktion. Auf jede Zahl der Zahlenreihe, die nur ungerade Primzahlen als Faktoren hat, folgt eine andere, die auch eine gerade Primzahl enthält. Wie die Umfangsverhältnisse des Begriffs sich in irgend einer Weise geltend machen, hängt immer von dem individuellen Falle, der zur Diskussion steht, hinsichtlich seiner Wirkungssphäre ab.

Das Beispiel kann also in zwiefacher Weise als Warnungstafel dienen. Einmal lehrt es, dafs die logische Koordination für die Umfangsverhältnisse der einzelnen Begriffe keine Richtschnur ab-

geben darf, bei völliger Unkenntnis einen gleichen Umfang als wahrscheinlich anzunehmen, und zweitens wird gezeigt, daſs trotz des minimalen Umfangs in einem wirklich vorhandenen Bereich der Begriff der geraden Primzahl sich ebenso oft manifestiert, als der des Widerspiels, vorausgesetzt, daſs die Frage nach Zahlen gestellt ist, die entweder eine gerade Zahl als Primfaktor enthalten oder nicht. Daſs dies Beispiel auch auſserhalb der mathematischen Sphäre seine Analoga finden kann, liegt auf der Hand. Es können in der Natur verschiedene Genera eine koordinierte Reihe von Arten aufweisen und von diesen wieder Unterarten ausgehen, während doch das Genus, das, im Gegensatz zu allen anderen, nur eine einzige Species wirklich einschlieſst, die gröſste Frequenz enthalten könnte. v. Kries hatte also zweifellos recht, wenn er einmal objektive Gröſsenverhältnisse verlangte, fürs andere aber die Bedingung aufstellte, daſs innerhalb des Bereichs, in dem das Urteil irgend einen Fall zu seinem Objekt zu machen im Begriff ist, eine scharfe Gleichheit unter den Gegenständen die vollständige Indifferenz unserer Aussage garantiere. Er formuliert seine Bedingungen in dem Satze: Annahmen stehen in einem zahlenmäſsig angebbaren Wahrscheinlichkeitsverhältnis, „wenn sie indifferente und ihrer Gröſse nach vergleichbare ursprüngliche Spielräume umfassen, und daſs bestimmte Wahrscheinlichkeitswerte sich daher da ergeben, wo die Gesamtheit aller Möglichkeiten durch eine Anzahl solcher Annahmen erschöpft werden kann". Diesen Satz nennt er das „Prinzip der Spielräume". Annahmen, die gleiche und indifferente urprüngliche Spielräume umfassen, sind also gleichwahrscheinlich. Es hat zwar keinen Sinn, um Worte zu streiten, indessen ist doch hier der Ausdruck „Prinzip", wie mir scheint, nicht an seinem Platze. Die Bezeichnung „Spielraum" bleibt trotz sehr eingehender Untersuchungen undefiniert; ein Bild, und wenn es auch noch so zutreffend ist, kann uns den festen Begriff, der im „Grundsatze" aufzutreten hat, nicht ersetzen. Das, was wir unter einem Spielraum verstehen sollen, wird uns immer wieder durch Beispiele erläutert, aber wir können nicht einsehen, daſs nicht vom Würfel oder den Urnen alles zu abstrahieren wäre, was die Grundlage der Theorie abgeben kann. Es handelt sich bei dem Satze von v. Kries lediglich um ein Postulat, und in diesem Sinne hat die Kritik allgemein die Ansprüche, die es stellt, anerkannt. Selbst Stumpf, der eine extreme Richtung verficht, kann sie „in gewissem Sinne zugeben". Die mathematische Wahrscheinlichkeit beruht auf einer Übereinkunft; sobald die Zahl in

unser Urteil aufgenommen wird, und die Rechnungsoperationen angewendet werden, haben wir nur zu untersuchen, ob die Grundlage der Konvention sich mit den Prinzipien des Denkens und Erkennens in Übereinstimmung befindet. Ist das der Fall, so können auch die aus jener Abrede gezogenen Konsequenzen nicht zu Diskrepanzen führen. Die behauptete allgemeinere Bedeutung jenes Prinzips, daſs es aufzufassen sei als die Methode, mit welcher wir auch auſserhalb der numerischen Bestimmung zu Urteilen der Wahrscheinlichkeit gelangen, kann nicht wundernehmen, denn der logische Untergrund ist immer derselbe. Freilich meinten wir, daſs das Prinzip eben die numerische aus dem allgemeinen Bezirk des Wahrscheinlichen herausheben müsse. Gerade in dieser Beschränkung würde sein Wert liegen, wofern es notwendig und die Bedingung wäre, eine mathematische Wahrscheinlichkeit auszusagen. Diese Notwendigkeit eines Wahrscheinlichkeitsprinzips im Sinne eines Prinzips der Erkenntnis, das sich mit der Kausalität oder überhaupt unseren Voraussetzungen über das gesetzmäſsige Geschehen in der Welt vergleichen lieſse, bestreite ich, wie ich die Notwendigkeit eines Prinzips der Dampfmaschine, des Luftballons und, so paradox es scheinen mag, der analytischen Geometrie oder der Differentialrechnung nicht bezweifle, sondern direkt verneine. Erfindungen ruhen niemals auf Prinzipien ihrer eigenen Art, sondern sie stellen sich auf die allgemeinen Gesetze, nachdem diese entdeckt worden sind. Daſs eine Sekante in ihrer Grenzlage in die Tangente übergeht, ist einmal entdeckt worden; an diesen Grenzübergang ein groſsartiges Maſssystem für alle funktionellen Beziehungen zu knüpfen, ist die Frucht genialer Erfindung. Bevor man zur Wahrscheinlichkeitsrechnung kommen konnte, ist die Entdeckung notwendig gewesen, daſs es Fälle giebt, von welchen wir eine gleiche Wahrscheinlichkeit aussagen. Giebt es nun ein Prinzip der gleichwahrscheinlichen Fälle, oder ruhen auch sie auf allgemeineren Erkenntnisprinzipien? Ich meine das letztere. Wird Jemand besondere Prinzipien nötig haben, wenn aus einer Urne, die nur eine weiſse Kugel enthielt, diese gezogen worden ist, und ich nach der Grundlage frage, welche die Sicherheit des Urteils über diesen Fall garantiert? Es ist schwierig genug, hier in diesem Beispiele eine vollständige Analyse des Denkprozesses zu geben, und daſs man dabei auf letzte Prinzipien kommt, auf Unerklärliches, damit haben wir Menschen zu rechnen. Was wird denn aber geändert, wenn neben jener Urne mit einer weiſsen eine dieser täuschend ähnliche

aufgestellt wird, die eine schwarze Kugel verbirgt? Nun kann der Vorgang bei beiden Urnen sich abspielen. Für beide Fälle ist in gleicher Weise vorgesorgt; es kann wirklich der eine wie der andere eintreten; nichts hindert, nichts spricht dafür, die eine vor der andern zu bevorzugen. Haben wir denn Schwierigkeiten, den Begriff „Zug einer weifsen Kugel" und den andern, analogen zu bilden und nun als etwas besonders zu Erklärendes von dem Begriffe: „Zug einer weifsen oder einer schwarzen Kugel" zu scheiden? Stecken nicht in beiden alle Elemente der Erkenntnis? Weifs man denn nicht sicher, wenn auf einen Griff bei lauter weifsen Kugeln eine individuell von allen anderen verschiedene erscheint, dafs sich dieser Fall von jedem andern möglichen nicht mehr unterscheidet, wenn ich die individuellen Verschiedenheiten im Begriff „weifse Kugel" aufhebe, wie hier im Urnenbeispiele sofort der Begriff „Zug einer Kugel" die Gewifsheit herstellt? Jene logische Gleichsetzung im Begriff hat ihre Voraussetzungen natürlich in den quantitativen und qualitativen Elementen, die ich zur Einheit bringe; ich kann mit dem Begriffe „Zug einer Kugel" keine objektive Aussage verbinden — gleichviel, ob er geschehen ist, geschieht oder geschehen soll, wenn nicht die Bedingung erfüllt ist, dafs sie da war, ist oder sein wird, und dafs sie ebensowohl in allen drei Fällen gezogen werden kann. Alle gleichwahrscheinlichen Fälle müssen wirklich vorhanden sein in dem Sinne der Gewifsheit, die ich habe, wenn ich irgend eine Verrichtung ausführen will. Die logische Subsumption erstreckt sich hier immer auf Begriffe, die nicht blofs Gegenstände, sondern ein G e s c h e h e n umfassen, für das alle Bedingungen vorhanden sein müssen, und zwar in ununterscheidbarer Weise, damit ich dem Eintritt dieses Falles die gleiche Wahrscheinlichkeit nachsagen kann, wie dem irgend eines andern.

Überall, wo wir nichts Thatsächliches aussagen, sondern von einem Geschehen sprechen, fingieren wir, dafs alle dafür notwendigen Bedingungen erfüllt zu denken sind. Wenn ich mit Notwendigkeit erwarte, dafs dieser Felsen durch Dynamit gesprengt werde, und also auch mit Gewifsheit ausspreche, dafs man mit Dynamit Felsen sprenge, so liegt im Begriffe dieses Vorgangs, dafs er sich mit Notwendigkeit vollzieht, wenn alle seine Bedingungen auch erfüllt sind. Fehlt ein wesentliches Merkmal des Begriffs, so fällt auch die Wirkung fort; dem Begriffe entspricht in Wirklichkeit nichts; ich mufs auf das Verhalten einen andern Begriff anwenden, der, wie in diesem, so auch in ähnlichen Fällen, nicht ganz logisch,

aber doch verständlich gebildet wird. Man spricht von einer mifslungenen Dynamitexplosion, wie man auch sagt, dafs Jemand ein Jahr vor seinem 50jährigen Dienstjubiläum gestorben ist, oder wie wir gelesen haben, dafs in der Ankündigung der Tod des zukünftigen Schwiegervaters beklagt wird. Die Fiktionen, die in all unseren Lehrbüchern, in all unseren Begriffen liegen, verändern die logische Form weder der Begriffe noch der Urteile. In diesen beiden Urnen ruhen für uns, die wir einen Anhalt für die Aussage bedürfen, der „Zug einer weifsen" und der „einer schwarzen Kugel". Alles, was sie wirklich macht, ist für unser Urteil nicht sowohl ununterscheidbar als völlig gleichgültig. Die beiden Züge unterscheiden sich für uns nur durch die Adjektiva „schwarz" oder „weifs". Prophezeien können und wollen wir nicht, also müssen wir uns daran genügen lassen, dafs wir hier zwei völlig gleiche Fälle haben, von denen ein jeder eintritt, wenn seine Urne getroffen wird. Auf dieser völligen Gleichheit der Begriffe eines Geschehens beruht die Gleichsetzung der beiden Fälle, die nur ein unwesentliches Merkmal, die Farbe der Kugeln, individualisiert. So ist es beim Würfel, dem wir Zahlen aufschreiben, bei der Münze, die auf zwei, nur durch die Prägung verschiedene Weisen in die Ruhelage kommen kann, und ähnlich bei allen anderen Beispielen. Die Wahrscheinlichkeit ruht mit ihrem Denkinhalt im gemeinen Verstande, die gleiche Wahrscheinlichkeit auf der logischen Gleichheit im Begriff, wofern dieser in der Anschauung und im Geschehen seine Stütze findet. Vom leeren Begriffe aber kann auf irgend eine Existenz nicht geschlossen werden, und wenn ich irgendwo und irgendwann eine Aussage über irgend eine Wissensmaterie machen will, so kann ich keine Wahrscheinlichkeit behaupten, wenn nicht die Gewifsheit aller Möglichkeiten gewährleistet ist. Wenn nun aus einer der beiden Urnen eine schwarze Kugel gezogen worden ist, so braucht man sich über alle einzelnen mechanischen Vorgänge den Kopf nicht zu zerbrechen, weil diese die Wahrscheinlichkeitsrechnung gar nichts, sondern nur die Mechanik oder die Physiologie angehen. Die Gewifsheit aller Möglichkeiten fordern, klingt vielleicht fremd und sonderbar, doch ist ja ein Mifsverstehen nicht zu besorgen. Alle Möglichkeiten müssen gewährleistet sein, wie Jemand, von dem ich nur weifs, dafs er sich jetzt mit gleicher Wahrscheinlichkeit im deutschen Reichstage oder in einem preufsischen Ministerialgebäude aufhält, notwendig in Berlin sein und ihm der Zugang zu beiden Häusern frei sein mufs.

Und wenn 1000 Personen zu den beiden Urnen geführt werden, und sich dabei annähernd gleichvielmal schwarz und weifs registrieren läfst, so ist auch dabei nichts, was eine besondere Erklärung nötig machte, oder was überhaupt der Erklärung fähig wäre — aufser etwa eines. Wenn uns Jemand immer den Zug vorhersagte, der wirklich eintrifft, so ständen wir vor einem Rätsel oder vor einem Schwindler. Das Prinzip der Spielräume aber kann nicht erklären und nicht dem Verständnis näher bringen, was im Grunde gar keiner besonderen Erklärung bedarf. Eine Physik des Zufalls ist eine contradictio in adjecto, denn er eben ist nur da, wo die Physik aufhört, und die Physik fängt immer da an, wo der Zufall endet. Nur das können wir nicht zugeben, dafs wir den Zufall spielen lassen, wo wir gar nichts wissen, wo nicht einmal die zahlenmäfsige Einteilung gewährleistet wird. Die physikalischen Vorgänge, von denen wir absehen, weil wir sie nicht vorherzusagen imstande sind, müssen ihrer Natur nach im grofsen und ganzen gewährleistet sein; ja es mufs theoretisch möglich sein, sie nach erfolgtem Resultat in ihre Elemente zu zerlegen. Beim Würfel und den Kugeln ist nichts rätselhaft. Hätten wir eine Urne mit einer beliebig gegebenen Kugelverteilung, also eine feste Zahlenbestimmung, und lägen in jeder Kugel noch geheimnisvolle Kräfte, die den Zug verhindern oder begünstigen würden, ohne dafs wir sie genau kennen und zu veranschlagen in der Lage wären, so wäre es trotz aller zahlenmäfsigen Disjunktion wiederum unmöglich, ein Wahrscheinlichkeitsurteil zu fällen. Oder sollen wir in der Verteilung der Kräfte wiederum dem Zufall eine Stelle anweisen? Wenn es die Aufgabe bestimmt vorschreibt, d. h. wenn wir hypothetisch diese Verteilung dem Zufall anheimstellen, nur dann ginge es.

Jedermann meint, dafs der Würfel mit einer Seite sich präsentieren mufs; ob er über die Verteilung auf die einzelnen Seiten bei vielen Würfeln auch nur das Geringste erfährt, wenn er bei v. Kries das Folgende liest, mag der Entscheidung des Lesers überlassen bleiben. v. Kries hatte ein eigenartiges Stofsspiel beschrieben, und darauf beziehen sich einige leicht verständliche Hinweise des folgenden Citats: „Ganz ähnlich verhält sich nun die Sache auch in komplizierten Fällen, etwa beim Würfelspiel. Welches Resultat ein Wurf ergiebt, d. h. welche Seite schliefslich oben liegt, das wird durch eine ganze Anzahl von Bewegungen bestimmt. Wir bewegen den Würfel auf und ab, vor- und rückwärts, nach rechts und links, lassen ihn Drehungen um verschiedene Achsen in einem und in

entgegengesetztem Sinne durchlaufen und erteilen ihm schliefslich, indem wir ihn aus der Hand entlassen, gewisse fortschreitende und drehende Geschwindigkeiten. Ehe gewürfelt wird, wissen wir, dafs eine gröfsere Zahl solcher Bewegungen vorgenommen werden wird; die Zahl und Reihenfolge derselben aber und der Betrag einer jeden erscheint in weiten Grenzen ungewifs. Nun sieht man zunächst, dafs die Gesamtheit aller sich ergebenden Möglichkeiten auch hier jedes einzelne der sechs möglichen Endresultate in aufserordentlich häufiger Wiederholung umfafst; es erscheinen von vornherein zahllose Modi der Bewegungen denkbar, welche den Wurf 6 herbeiführen würden, zahllose, welche den Wurf 5 zur Folge hätten u. s. w. Was in dem vorigen Beispiele durch die Wiederholung von Schwarz und Weifs auf der Bahn geleistet wurde, ist also hier gleichermafsen dadurch hergestellt, dafs bei umfangreicher Variierung der Bewegungen sich immer nur die sechs Möglichkeiten des Erfolges wiederholen können. Denken wir nur für jede einzelne der in Betracht kommenden Bewegungen einen stetigen Wahrscheinlichkeitsansatz gemacht, so ergiebt sich auch hier unmittelbar die Gleichheit der Wahrscheinlichkeit für jeden der Würfe 1—6; denn wie dort die gleiche Breite der schwarzen und weifsen Streifen, so wird hier die geometrische und physische Regelmäfsigkeit des Würfels es notwendig mit sich bringen, dafs einem bestimmten zusammenhängenden Komplex von Bewegungsmöglichkeiten, welcher etwa den Wurf 6 ergäbe, immer andere, in jeder Beziehung nur ganz wenig verschiedene und von sehr nahe gleichem Umfange sich an die Seite stellen lassen, welche die Würfe 1, 2, 3, 4, 5 bewirkten, und dafs diese sechs Bewegungsarten, in regelmäfsiger Abwechslung sich wiederholend, den ganzen Spielraum möglicher Bewegungen ausfüllen. Es ergiebt sich so in ganz ähnlicher Weise wie dort das Resultat, dafs die Gesamtwerte der die Erfolge 1, 2, 3, 4, 5 und 6 ergebenden Bewegungsspielräume mit gröfster Annäherung gleich sein müssen. Hieraus resultiert dann auch die gleiche Wahrscheinlichkeit jedes dieser Erfolge unter denselben Voraussetzungen, wie sie dort gemacht wurden." (S. 54.)

Ist denn durch solche Argumentationen, die sich ähnlich mehrfach bei v. Kries finden, der Aufgabe nur um einen Schritt näher zu kommen? Wenn in der Schule die Aufgabe gestellt wird, zwei Kreise zu konstruieren, die sich entweder von aufsen oder innen berühren, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Konstruktion des einen und des andern Falles bei jedem Schüler völlig gleich. Hier

ruht die gleiche Wahrscheinlichkeit in der Wahl, die der Schüler nach seinem Belieben treffen kann, vorausgesetzt, daſs er die Konstruktion verstanden hat. Gewiſs, die Spielräume sind für beide Teile völlig gleich, und zwar in aller Schärfe; wie will man aber dem ausschlaggebenden Moment, der Wahl des Schülers, beikommen?

Wir haben in dem v. Kriesschen Postulat eine sehr wichtige Polizeimaſsregel, aber das Gesetz ist höheren Ursprungs. Uns ist in diesem Punkte erfreulich die Übereinstimmung mit Stumpf: „Doch möchte ich glauben, daſs wir hier nicht ein eigenes logisches Prinzip nötig haben, sondern daſs der Wahrscheinlichkeitsansatz als eine Ableitung aus einer vollständigen Disjunktion auf den gewöhnlichen logischen Axiomen ruht." Nur die erkenntniskritischen Ansprüche, die wir an die Disjunktion stellen, damit sie die Rechnung begründen könne, ziehen eine scharfe Grenzlinie; jene Physik des Würfelspiels aber, die mit den zahllosen „denkbaren" Modi der Bewegungen rechnet, könnte eher Wasser auf die Mühle der reinen, voraussetzungslosen Theorie der Denkmöglichkeiten leiten. Eben diese denkbaren Modi entziehen sich dem Urteil; alles Einzelne im Geschehen wird durch den Begriff „Auftreffen der Seite 6" überwunden, und wer den wirklichen Erfolg erklären will, setzt schon voraus, wie der Würfel allein auf der Ebene in die Ruhelage kommen kann; er wird Schwierigkeiten haben, im einzelnen Falle das Aufliegen von 6 herzuleiten, wenn irgend ein Wurf als Bestimmungsstück der Aufgabe gegeben ist, wofern er nicht kurzen Prozeſs macht und sagt: Es kann die 6 so gut auftreffen, wie irgend eine andere Seite auch.

---

# Das Gesetz der grofsen Zahlen.

Es mag gewifs auf den ersten Blick befremden, den Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit in seiner Prägung für die Rechnung auf einer Übereinkunft, sie mag noch so einleuchtend sein, ruhen zu sehen. Alle Beziehungen zum Spiel, die Einrichtung von Lotterien erwecken die Vorstellung, dafs man es mit etwas Denknotwendigem zu thun habe. Eine Lotterie mit 1000 Losen, die 50 Gewinne, eine andere, die 100 bei gleicher Loszahl hat, sollten diese nicht ohne weiteres ergeben, dafs, wie die Chancen des Gewinns im Verhältnis von 1:2 stehen, auch die Wahrscheinlichkeit des Gewinns sich verdoppeln müsse? Kein Zweifel, dafs die Chancenverhältnisse des Spiels die Wahrscheinlichkeitsrechnung ins Leben gerufen haben; sie haben den Begriff eines Geschehens, bei dem an sich nicht unterscheidbare Einzelfälle, gekennzeichnet durch ein Merkmal, das keinerlei Einflufs auf die Vorgänge auszuüben vermag, eine leicht verdiente Rolle spielen, den de Méré, Pascal und Fermat zu einer mathematischen Abstraktion in die Hände gespielt. Aber das doppelt und dreifach Wahrscheinliche ist keine Wertung, die wie der Begriff des Wahrscheinlichen in unserem Denken vorgefunden wird. Notwendig ist nur, dafs unser Urteil eine gröfsere Wahrscheinlichkeit aussagt, wenn die gleichwertigen Gründe sich mehren. Wenn es z. B. bei Moser (Die Gesetze der Lebensdauer S. 5) heifst: „Das Mafs der Wahrscheinlichkeit tragen wir in uns, die Wissenschaft mufs dasselbe folglich als vorhanden annehmen," so ist das nur insofern richtig, als wir, gestützt auf den Begriff der Gröfse, eine geringere und eine gröfsere Wahrscheinlichkeit innerhalb der Erfahrung — deren sonstige Bedingungen

immer vorausgesetzt bleiben — aussagen können. Nachdem Moser von den möglichen und glücklichen Fällen geredet hat, ist ihm die „Wahrscheinlichkeit nach dem Urteile aller Menschen nur $\frac{1}{3}$ so grofs, wenn der möglichen Fälle dreimal so viele sind u. s. w." (als der glücklichen), und je mehr der glücklichen Fälle, „desto gröfser ist uns die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Auch hierbei findet ein einfaches Verhältnis statt: verdoppelt sich die Zahl der glücklichen Fälle, so verdoppelt sich auch die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses." Nach solchen Betrachtungen, die immerhin zeigen, dafs Moser über die Fragestellung sich völlig Rechenschaft gegeben hatte, ist es dann leicht, die vorgefundenen „Data" in den bekannten Quotienten umzusetzen. Was definiert wird, liegt schon in völlig unbewiesenen, bei näherem Zusehen unhaltbaren, ja fast unverständlichen Annahmen. Die Beziehung auf das Spiel, die Wertung der Lose in obigem Beispiele bringt uns näher, was gemeint ist. Vernünftigerweise wird dadurch eine praktische, der Billigkeit entsprechende, exakte Preisregulierung in eine Verbindung mit unserm Urteil gebracht. Weil aber unter mathematisch scharf abgrenzbaren Umständen der doppelte Preis für ein Los rationellerweise zu fordern und zu zahlen ist, soll sich auch die Wahrscheinlichkeit, mit ihm zu gewinnen, verdoppeln? Nehmen wir an, dafs zur Sättigung eines Hungernden ein gewisses Quantum notwendig ist, sagen wir 100 Gewichtsteile, werden dann 20 Gewichtsteile den doppelten Effekt von 10 herbeiführen? Das Gleichnis hat, wie alle, seine Mängel; indessen will mir scheinen, dafs man mit einer zehnfachen Wahrscheinlichkeit ohne nähere Erklärung gar nichts anfangen kann, weil es sich um die logische Wertung eines Urteils handelt, während jede unmittelbar auf quantitative Verhältnisse verweisende Charakteristik die einfache Proportionalität unserem Verständnis viel näher rückt. Man kann durch Gleichnisse eher ad absurdum führen, als man mit ihrer Hülfe allein eine Behauptung stützen kann. Wir zweiflen keinen Augenblick, dafs man im gewöhnlichen Sprachgebrauch seit jeher sagt, dies Urteil sei tausendmal wahrscheinlicher, als ein anderes. Aber diese Aussage ist, wie Jedermann zugeben wird, selbst nur ein Gleichnis. Es hat der Disziplin vom ersten Beginn nicht an Analogien gefehlt, die eine Entdeckung niemals nötig haben wird, so gute Dienste sie auch dem Entdecker vor dem Erfolg leisten. Und nun gar eine mathematische Entdeckung. Der pythagoreische Lehrsatz legt nahe, sich den analogen Fall der ähnlichen Polygone, die auf den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks

konstruiert werden können, auf seine Bedeutung für das Gröfsenverhältnis anzusehen. Aber mit der Analogie selbst kann der Mathematiker nichts anfangen. „Probabilitas est gradus certitudinis et ab hac differt ut pars a toto", heifst es mit einem kühnen „ut" in der „Ars conjectandi" JAKOB BERNOULLIS, und LEIBNIZ[1]), der sich in einem Briefe über das thörichte Beginnen der Rechtsgelehrten und der Ärzte, welche den Mund vollnehmen mit Ausdrücken von der Art, dafs Gründe nicht nach der Zahl, sondern nach dem Gewicht zu schätzen seien, lustig macht, rügt zugleich, dafs jene von einer Wage nichts wissen, auf welcher die Gründe gewogen werden können. Mit den Mathematikern müsse man die Gewifsheit als Ganzes, die Wahrscheinlichkeiten als dessen Teile betrachten. Wahrscheinliches verhalte sich zum Wahren, wie ein spitzer Winkel zu einem rechten. Alles sehr geistreiche Bilder, aber das Fixiermittel der heutigen Mathematik fehlt, die Strenge, mit der jeder folgende Schritt auf einen ersten zurückzuführen ist, der entweder auf der natürlichen Heerstrafse allgemeiner Wahrheit angetreten oder durch einen nicht willkürlichen, sondern auf demselben Terrain künstlich hergestellten Pfade seinen Ausgang nimmt. Besitz und Schulden, Vorwärts- und Rückwärtsgehen, Fallen und Steigen, das sind alles Analogien, die die negativen Gröfsen aus dem gemeinen Verstande in die Mathematik hineinillustriert haben; aber die Multiplikation von $(-1)\cdot(-1)$ kann uns kein gesunder Verstand lehren, wie er sich auch keinerlei Vorstellung von dieser Operation bilden kann. Diese Multiplikation gehört nur auf Grund einer Festsetzung in das Gefüge der heutigen Mathematik, wird also die „Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$" darum minderwertig, dafs man ihr nachsagt, sie sei bedeutungslos, ein fast unsinniges Gleichnis, wenn man sie nicht auf das Postament einer logischen Notwendigkeit, sondern das der Übereinkunft, einer auf plausibler Basis beruhenden Definition stellt?

Auseinandersetzungen wie die MOSERS sind in der Litteratur nicht die Regel; sie sind relativ von aufsergewöhnlicher Klarheit, so wenig sie zu befriedigen vermögen. Namentlich die psychologischen Momente haben eine beständige Verdunkelung der ganzen Materie herbeigeführt. Es ist nicht ganz leicht, von dem Vergleich mit „Teilen der Gewifsheit" so weit zu gelangen, dafs man sagen könne, was denn mit der LEIBNIZschen „Wage" eigentlich gewogen

[1]) CANTOR, Gesch. d. Math. Bd. III. S. 338.

werde. Was wir vernünftigerweise zu erwarten haben, giebt gewifs den Inhalt für ein Wahrscheinlichkeitsurteil, aber das Wahrscheinliche kann sich auch allgemeinerer Aussagen bemächtigen. Im gewöhnlichen Gebrauch sind es Gründe und Gegengründe, die den Begriff charakterisieren, wir bleiben daher mit ihm im Bereiche des Verstandes, und wie alles Wissen von Etwas der Erkenntniskritik anheimfällt, die wir in unseren Abstraktionen von der Psychologie zu trennen pflegen, so können alle Exkursionen in das Getriebe der psychischen, logisch nicht determinierbaren Reaktionen auch den mathematisch zu formulierenden Wahrscheinlichkeitsausdruck daselbst nicht aufspüren. Definitionen wie diese[1]):

> „Unsere Hoffnung verhält sich zu unserer Furcht wie die Zahl der günstigen Fälle zu der Zahl der ungünstigen. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit ein Bruch, dessen Nenner durch die Summe der möglichen Fälle, und dessen Zähler durch die Menge der günstigen Fälle bestimmt wird"

dürften nicht selten sein. Man sieht, wie bequem hier ein „folglich" die Schwierigkeit mit sanftem Sprunge nimmt. Man könnte eine ganze Blumenlese solcher Definitionen zusammenstellen, in welchen der Versuch, etwas nachzuweisen, was nicht nachweisbar ist, an leeren Worten sich genügen läfst, die für den Verstand bleibende Lücke auszustopfen. In einem sehr guten Buche, dem von der Universität in Kopenhagen preisgekrönten Werke: „Die Lehre von der Mortalität und Morbilität" von Harald Westergaard erfahren wir im Gegensatz hierzu, dafs die Wahrscheinlichkeitsrechnung auf einer Fiktion beruht. Nachdem das Beispiel von 37 $s$ und 63 $w$ Kugeln in üblicher Form gegeben ist, heifst es wörtlich: „Wenn wir von der Wahrscheinlichkeit reden, eine schwarze Kugel zu erhalten, so sagen wir ja eigentlich, dafs es gleichwahrscheinlich ist, dafs jede der $s$ Kugeln gezogen wird. Soll dieses buchstäblich verstanden werden, so mufs man sich denken, dafs alle Ursachen ganz dieselben seien, da alle Kugeln dieselben Aussichten haben. Wäre solches aber der Fall, so müfsten notwendig alle schwarzen Kugeln mit herauf folgen, sobald die Hand eine ergriffen hätte, denn sonst wären die Ursachen ja nicht dieselben. Wenn alle Verhältnisse genau dieselben wären, so müfste notwendig die Ursache, die auf eine Kugel wirkte, gleichzeitig auf all die anderen mitwirken,

---

[1]) Reinhard, Arithmetisches Handbuch für Rechtsgelehrte (S. 19), herausg. von D. Georg Karl Treitschke. Dresden u. Leipzig. 1845.

und das Resultat würde sich so ergeben, dafs entweder alle Kugeln auf einmal herauf kämen, oder alle im Beutel liegen blieben."

Die gleiche Wahrscheinlichkeit wird hier zu einer Fiktion, und aus welchem Grunde? Weil gleichwahrscheinlich, „buchstäblich verstanden", so viel wie gleiche Gewifsheit bedeutet. Indem der Verfasser diese beiden Begriffe verwechselt, kommt er natürlich auf einen Widersinn. Und doch ist nicht die Fiktion, sondern die Abstraktion gleichwahrscheinlicher Fälle, die sich genau so an dem Geschehen: „Zug einer schwarzen Kugel" vollzieht, wie wir den Begriff „schwarze Kugel" bilden, die logische Grundlage der ganzen Rechnung. Wenn wir den Begriff „schwarze Kugel von Elfenbein und dem Radius 1 cm" bilden, so fingieren wir ganz und gar keine Identität der Kugeln, die ein Unding ist, sondern wir scheiden die Individuen voneinander wie immer. Aber wir sprechen aus, dafs sie sich untereinander vertreten können, ohne dafs dieser „Zug einer Kugel" infolge der Übereinstimmung ein „Zug aller Kugeln" werden müfste. Wir fingieren zuweilen eine Gleichheit der Objekte, wo sie nicht annähernd existiert, gewifs, und diese häufig sehr gewaltsamen Fiktionen hat man durch den Nachweis zu rechtfertigen, dafs sie für das Resultat der Untersuchung belanglos sind, aber man darf sie nicht durch den Hinweis auf eine allgemeine Fiktion der wissenschaftlichen Methode decken.

Von der in der Form scheinbar strengen Ableitung des Kalkuls bis zu dieser Verflüchtigung der objektiven Grundlagen in der Fiktion sind alle Nuancen der Betrachtung in Lehrbüchern und Anwendungen zu finden, die nicht einfacher und verständlicher durch die Frage werden, ob man es nur mit einer Methode von praktischem oder theoretischem Werte zu thun habe. Wir haben diese Alternative bisher nur gestreift und möchten ihr an dieser Stelle nur eine kurze Bemerkung widmen. Die mathematische Wahrscheinlichkeit präzisiert ein Urteil, wenn dessen Subjekt es zuläfst. Was wir mit dem Urteil anfangen wollen, ob wir daraufhin eine Handlung stützen oder einen Satz der Wissenschaft, eine Hypothese z. B., weiterverwenden wollen, ist doch für den Charakter und die Bedeutung der Methode gleichgültig.

Zunächst läfst sich also bemerken, dafs die Frage eine sachliche Grenze nicht zieht, und dafs man auf so allgemeine Formulierung überhaupt nichts aussagen kann. Aufser in den Aufgaben der Lehrbücher ist die mathematische Bestimmung der Wahrscheinlichkeit ein Mittel, das seine Dienste leistet wie jede andere Methode

der Wissenschaft auch. Die zahlenmäfsigen Angaben enthalten eine sofort übersichtliche, objektive, Jedermann verständliche Charakteristik und haben so den Wert, den jedes Mafs überhaupt besitzt. Sie messen, was zu messen ist: Grade der Wahrscheinlichkeit; sie vermehren unsere Kenntnis so wenig, wie das Thermometer die Temperatur erhöht.

Der Formalismus der Rechnung hat auf vielen Gebieten gute Dienste geleistet; die Terminologie hat sich in praktischen Disziplinen eingebürgert, die jenen Formalismus sehr gut gebrauchen konnten, die aber Begriff und Wesen der mathematischen Wahrscheinlichkeit mehr aus einem theoretisch-ästhetischen Bedürfnis sich als Gewand angezogen haben, als aus Gründen der Sache selbst. Wie die siamesischen Zwillinge sind die Hasardspiele und das Versicherungswesen zugleich in die Erscheinung getreten, ein wunderbares Spiel der Natur — dort und hier eine Verkettung heterogener praktischer Einrichtungen, wenn sich dieser Oberbegriff für die beiden unnatürlichen Geschwister überhaupt verwenden läfst. Ihr Band ist allerdings der mathematische Eifer gewesen, der an den Kombinationen des Zufalls eine willkommene Gelegenheit für die Übung des Scharfsinns fand und sich nach einer nützlichen Verwendung umsah; die Schemata des Spiels konnten auf die Dauer nicht befriedigen, und so wenig der Mathematiker eine Verpflichtung hat, für die praktische Verwertbarkeit seiner Untersuchungen einen Nachweis zu liefern, so erwünscht wird es dem Begründer einer neuen Disziplin sein, sie auch durch ihren Nutzen gestützt zu sehen.

Diesen Nutzen hat die Kritik der Grundlagen erst in zweiter Linie ins Auge zu fassen. Das Fundament zu untersuchen, war die Bestrebung der früheren Kapitel. Es genügt aber nicht, dafs wir dessen logische Widerspruchslosigkeit darthun können; auch die in der richtigen Beurteilung eines empirischen Thatbestands nachgewiesenen Gründe dürfen nicht davon zurückhalten, die Kontrole an den Folgerungen selbst von neuem auszuüben. Aus Wahrscheinlichem wird man selbst nur Wahrscheinliches folgern können. Haben aber die Prämissen objektive Bedeutung, so dürfen auch die conclusiones nicht in der Luft schweben. Die Folgerungen werden von der Modalität der Prämissen abhängig sein. Ist der Obersatz assertorisch, der Untersatz problematisch, so wird auch der Schlufssatz nur problematisch behauptet werden können. Eine Syllogistik der Wahrscheinlichkeitsschlüsse, so interessant sie sein möchte, liegt nicht in der Absicht dieses Buchs. Aber es versteht

sich von selbst, dafs die Folgerungen mit demselben Mafse zu beurteilen sind, wie die Prämissen selbst.

Das Bernoullische Theorem ist der Hauptsatz der Disziplin. Er kann nicht in das Gebiet sicheren Wissens überleiten, aber es ist seine Tendenz, von minimalen, häufig bedeutungslosen Quotienten zu solchen überzugehen, welche wohl eine Richtschnur für nahezu sichere Urteile abgeben können.

Zwanzig Jahre hatte Jakob Bernoulli nachgedacht, als ihm endlich der grofse Wurf gelang, das Gesetz der grofsen Zahlen, wie man sein Theorem seit Poisson zu nennen pflegt, zu beweisen. Cardano[1]) hatte es schon ziemlich deutlich ausgesprochen, jetzt aber lag es zweifellos mathematisch bewiesen vor dem Auge des Forschers. Die Brücke zur allgemeinsten Verwendung war geschlagen — dafs es sich um Rechtfertigung einer allgemeinen Anschauungsweise, die im täglichen Gebrauche geübt werde, handelte, konnte nur einen Vorzug begründen, und von vornherein waren weittragende Konsequenzen auch von der mathematischen Seite zu erwarten. Wir wollen versuchen, das Gesetz von beiden Seiten zu beleuchten, indem wir für die mathematischen Betrachtungen uns verstatten, so deutlich zu werden, dafs auch der Nichtmathematiker bei gutem Willen das Folgende verstehen kann. Wer das Produkt

$$10 \cdot 10 = (3 + 7)(3 + 7) = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 7 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 7$$

in dieser Weise bildet, der weifs, dafs die beiden mittleren Glieder im Resultat sich nur durch die Anordnungen der beiden Faktoren unterscheiden, so dafs er ohne weiteres auf Grund der Multiplikationsregeln

$$3 \cdot 3 + 2 \times 3 \cdot 7 + 7 \cdot 7$$

niederschreiben wird. Nimmt man jetzt einen dritten Faktor $(3 + 7)$ hinzu, so läfst sich leicht die Zusammensetzung

$$3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \times 3 \cdot 3 \cdot 7 + 3 \times 3 \cdot 7 \cdot 7 + 7 \cdot 7 \cdot 7$$

für das Produkt verifizieren, und wofern man dasselbe Verfahren fortsetzt, so wird man bei 10maliger Setzung des Faktors also für die Zahl 10 000 000 000 eine Zusammensetzung aus Summanden konstatieren können, von welchen ein jeder 10 Faktoren 3 oder 7, oder 3 und 7 enthält, während eine Zahl noch überdies angiebt, wie oft ein jedes einzelne so beschaffene Produkt zu setzen ist. Schreibt man rechts oben eine Zahl, die sagt, wie oft der einzelne Faktor zu setzen ist, so erhält man

[1]) Vgl. Cantor a. a. O. S. 334 u. f.; auch Bd. II S. 495.

$$(3+7)^{10}=3^{10}+10\times 3^9 7^1+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}3^8\cdot 7^2+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}3^7\cdot 7^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}3^3\cdot 7^7+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}3^2\cdot 7^8+10\times 3^1\cdot 7^9+7^{10}$$

Für die Rechnung ist nur von Belang, welche Faktoren auftreten; aber wenn ich nach dem Entstehen der einzelnen Produkte frage, so kann man z. B. in dem zweiten Gliede die einmal vorkommende Zahl 7 an eine jede Stelle der Anordnung gesetzt denken, so daſs

$$\begin{array}{c} 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7 \\ 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 3 \\ 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 3\cdot 3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 7\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 \end{array}$$

das vorstehende Bild ihm sagt, wie dieses Glied und auch alle anderen entstanden zu denken sind. Die kleine Rechnung giebt ein Beispiel für den binomischen Satz, der allgemein in dieser Form ausgesprochen werden kann:

$$(a+b)^n=a^n+n\,a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^2b^{n-2}+n\,a\,b^{n-1}+b^n$$

Was werden also die Gröſsen:

$$\begin{array}{cccc} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{1\cdot 2} & \dfrac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdots\cdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} \end{array}$$

die wir abgekürzt mit den unteren Zeichen benennen wollen, angeben? Sie werden mir sagen, wie viele Anordnungen die Gröſsen $a$ und $b$ zulassen, wenn ich sie auf alle möglichen Weisen nebeneinander schreibe. Sie führen den Namen Binomialkoeffizienten, haben aber insofern eine ganz allgemeine Bedeutung. Was auch die Zeichen $a$ und $b$ vorstellen mögen, nehme ich von jeder Art eine bestimmte Zahl, zusammen aber $n$, so giebt die Gröſse

$$\binom{n}{\alpha}$$

an, wie oft sich $\alpha$ Elemente $a$ und $n-\alpha$ Elemente $b$ oder die umgekehrte Verteilung so präsentieren können, daſs eine jede Anordnung anders erscheint. Diese Beziehung ist eine kombinatorische, die ein Jeder, der sich die Mühe nimmt, alle jene Anordnungen zu bilden, nachentdecken kann, die allgemein, wie sie hier ausgesprochen,

leicht beweisbar ist, und die Selbstverständliches im Sinne von JACOBI auf eine wissenschaftliche Form bringt. Unter den tausendfachen Beziehungen, die unter den Koefficienten denkbar und bekannt sind, ist die anschaulichste in dem PASCALschen Dreiecke symbolisiert, das wir hierher setzen wollen:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} &&&&&&1&&&&&& \\ &&&&&1&&1&&&&& \\ &&&&1&&2&&1&&&& \\ &&&1&&3&&3&&1&&& \\ &&1&&4&&6&&4&&1&& \\ &1&&5&&10&&10&&5&&1& \\ 1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \\ \end{array}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Wer sich dieses Zahlenbild ansieht, wird es leicht fortsetzen können, da das Gesetz in die Augen springt. Kombinatorische Sätze sind Identitäten in allgemeinerem Sinne, als die algebraischen Formeln. Das Produkt

$$(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$$

ist rechts und links identisch ausgedrückt für alle Gröfsen $a$ und $b$, mit denen man multiplizieren kann.

Aber jene Koeffizienten — hier 1, 2, 1 — leisten nur für einen besonderen Fall, für die Multiplikation, was sie ganz allgemein für alles, was einer Anordnung im Raume oder in der Zeit fähig ist, aussprechen. Was im Raume irgendwie geordnet ist, kann nur durch ein Geschehen in eine andere Ordnung gebracht werden, und das Geschehen selbst, wofern es sich um Ereignisse handelt, die wir nur im Raum und in der Zeit unterscheiden können, erfolgt immer in einer bestimmten Ordnung, die, je mehr der Inhalt zurücktritt, bestimmend wird für die begriffliche Abstraktion, die uns wiederum Fälle zu zählen gestattet.

Fragen wir nach den Zahlen unseres Systems, welche die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5 sämtlich und nur je einmal enthalten, so wissen wir, dafs in unserer Schreibweise jede Stelle einen Rang repräsentiert, die letzte kommandiert Einheiten, die vorletzte Vielfache von 10, dann kommen die Hunderte u. s. f. Unsere Jahreszahl 1896 sieht anders geschrieben so aus:

$$6 \cdot 1 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 1 \cdot 1000$$

Wir können also mit jenen 5 Ziffern:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

verschiedene Zahlen schreiben; lassen wir aber nur die Ziffern 1

oder 2 oder 1 und 2 in die 5stellige Zahl eintreten, so kann mit ihnen so oft eine andere Zahl gebildet werden, als die Summe der Binomialkoeffizienten

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32$$

uns das angiebt. Im ersten Beispiele fallen alle 120 Fälle in einen einzigen zusammen, wenn ich nach dem Produkt oder der Summe frage, im zweiten werden der Reihe nach

119 115 110 110 115 119

Fälle von solchen der gezählten 32 nicht unterscheidbar, obwohl bei einer Herstellung des Zahlenbilds aus stofflichen Zahlzeichen 1 und 2 sie alle noch verschiedene Anordnungen bedeuten würden. In diesen kombinatorischen Schematen hat man, wie sich in ihrer Behandlung die Disziplin fast erschöpft, eine Richtschnur für deren Beurteilung überhaupt. Es liegt in ihnen wie in allen mathematischen Wahrscheinlichkeitsurteilen immer ein Hinweis auf ein Geschehen, innerhalb dessen wir eben jenen verschiedenen Anordnungen allein einen Sinn beizulegen vermögen. Eine Urne mit unbekanntem Mischungsverhältnis der Kugeln ist uns ein Rätsel, das wir nicht zu lösen vermögen. Die Möglichkeiten in Bezug auf Zahl und Verteilung geben keinen Anlaſs, einen Quotienten von irgend einem Sinn zu bilden, der über sie hinausführte, wenn uns nicht irgend ein Anhalt gegeben ist, wie die Kugeln in die Urne hineingekommen sind.

Mit den Möglichkeiten Kombinationen vorzunehmen, kann Niemand verhindert werden; es mag sogar eine gute logische Übung und für die Erkenntnis der Disjunktionen von Bedeutung sein, daſs die Zusammensetzung disjunktiver Urteile dieselben Ansprüche an die Unabhängigkeit der Prädizierungen stellt, wie sie in unserer Disziplin von den „Fällen" verlangt wird[1]). Aus

$A$ und $B$ sind entweder männlich $(a)$ oder weiblich $(b)$;
$A$ und $B$ sind entweder blond $(\alpha)$ oder braun $(\beta)$

ergeben sich die Möglichkeiten

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| für $A$ | $a\,\alpha$ | $a\,\beta$ | $b\,\alpha$ | $b\,\beta$ |
| oder $B$ | $a\,\alpha$ | $a\,\beta$ | $b\,\alpha$ | $b\,\beta$ |

[1]) Auf die Bedeutung der „kombinatorischen Synthesis" für die Logik wird von Cournot hingewiesen. Wahrscheinlichkeitsrechnung übers. von Schnuse. S. 1.

also für

| $A$ und $B$ | | $A$ und $B$ | |
|---|---|---|---|
| $a\ \alpha$ | $a\ \alpha$ | $b\ \alpha$ | $a\ \alpha$ |
| $a\ \alpha$ | $a\ \beta$ | $b\ \alpha$ | $a\ \beta$ |
| $a\ \alpha$ | $b\ \alpha$ | $b\ \alpha$ | $b\ \alpha$ |
| $a\ \alpha$ | $b\ \beta$ | $b\ \alpha$ | $b\ \beta$ |
| $a\ \beta$ | $a\ \alpha$ | $b\ \beta$ | $a\ \alpha$ |
| $a\ \beta$ | $a\ \beta$ | $b\ \beta$ | $a\ \beta$ |
| $a\ \beta$ | $b\ \alpha$ | $b\ \beta$ | $b\ \alpha$ |
| $a\ \beta$ | $b\ \beta$ | $b\ \beta$ | $b\ \beta$ |

ob aber Jemand auf diese Einteilung hin sagen würde, aus obigen Daten folgt, dafs die Wahrscheinlichkeit für $A$ und $B$ männlich und blond zu sein $= \frac{1}{16}$ ist, möchten wir bezweifeln.

Jedenfalls wird man aber aus diesen Beispielen ersehen, dafs die Kombinationen von allgemeinster Bedeutung sind, dafs sie selbst über nichts Aufschlufs zu geben vermögen, als über Anordnungen in Raum und Zeit. Überall wo sich kombinieren läfst, und wer daran Vergnügen findet, kann ja Wehmut, den Nordpol und Zahnschmerz permutieren, wird sich auch der binomische und polynomische Satz zu irgend welcher Bedeutung vergewaltigen lassen. Aber wenn diesem wichtigen mathematischen Theorem irgend eine Bedeutung aufser der formalen gegeben werden soll, so mufs man ihn durch Voraussetzungen realer Natur erfüllen, sonst ist der Wert in der Übung der Rechnung ausschliefslich zu suchen, der Erkenntniszuwachs aber gleich Null. Auch darüber ist kein Streit, dafs Jakob Bernoulli der Meinung gewesen ist, eine mit den Kombinationen im Zusammenhange stehende Maxime unseres Denkens, die bis dahin, wenn auch nicht instinktiv, so doch ohne scharfe zahlenmäfsige Begründung geübt worden war, durch ein mathematisches Gemäuer in den Rang einer uneinnehmbaren Burg zu erheben. —

Der binomische Satz rechnet und zählt; soll ihm also noch eine besondere Bedeutung über diese formale Arbeitsleistung hinaus beigelegt werden, so mufs auch dem Gezählten die Fähigkeit innewohnen, die Berechtigung dafür nachzuweisen. Es tritt uns hier dieselbe Frage, wie überhaupt in der Disziplin, entgegen. Genügt es, mögliche Fälle zu zählen, die sich die gleiche Wahrscheinlichkeit lediglich durch unsere Unkenntnis erwerben, oder sollen wir zählen, was nach unseren Erwägungen als gleichwahrscheinlich anzusehen ist? Ein Kriterium für die Berechtigung der

einen oder anderen Ansicht kann die Anwendbarkeit des binomischen Satzes selbst nicht geben, denn diese ist beiden völlig gewährleistet. Aber eine andere Frage ist es, ob der Begriff der Wahrscheinlichkeit aufserhalb unserer einschränkenden Festsetzungen noch einen Anteil an den Resultaten dieser komplizierten Rechnungsweise behält, die mit dem Aufstieg in das Terrain der höheren Mathematik an Anschaulichkeit verliert und lediglich durch den ersten Schritt, die Definition, gerechtfertigt wird.

Sind es nur jene Verhältniszahlen, die „günstigen Fälle“ summiert und die Zahl aller möglichen, ist es nur die vorher gegebene Einteilung einer erschöpfbaren „Sphäre“ oder eines „mefsbaren Spielraums“, welche unsere Übereinkunft in der Definition mit dem, was sie dem Denken an Inhalt verleihen, sanktionieren, oder hat sie auch in weiteren Verhaltungsweisen des Geschehens, das ja unserem Verstande ädaquat sein mufs, Faktoren, die den geschlossenen Vertrag erst ratifizieren?

Eine Urne mit $n$ weifsen und $m$ schwarzen Kugeln, nach und nach entleert, ohne dafs man einen Blick hineinfallen läfst, giebt als Schlufsresultat, was vorher richtig gezählt worden ist. Wiederholt man dasselbe Spiel, so wird sich eine andere Anordnung ergeben, und wollte man die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Aufeinanderfolge der $w$ und $s$ Kugeln bestimmen, so wären

$$\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m} = \frac{(n+m)!}{n!\,m!}$$

verschiedene Folgen zu zählen, die Wahrscheinlichkeit einer wäre also der reciproke Wert dieses Bruches. Aber schon wenn die Zahl der Kugeln einigermafsen grofs sein würde, liegt es nahe, bei lotteriemäfsigem Verfahren nach einer Reihe von Zügen zu erwarten, dafs das Mischungsverhältnis sich auch in den Resultaten geltend machen werde. Weicht aber das Resultat davon ab, so ist dabei auch nichts Unerklärbares, denn es sind ja alle Anordnungen und auch die Extreme, dafs $\alpha$ weifse oder $\alpha$ schwarze aufeinander folgen, völlig jeder anderen Anordnung gleichberechtigt, wenn $\alpha < n$ oder $m$ ist. Nur wahrscheinlich ist es nicht, dafs gerade diese Folge erscheint, während es eine grofse Zahl anderer giebt, die dem Verhältnis $n:m$ mehr oder minder nahe kommen, ganz davon abgesehen, dafs eben alle anderen Fälle verschiedener Farben auch noch auf mehr als eine Weise dasselbe numerische Verhältnis produzieren können. Man sieht aber unmittelbar ein, dafs man nicht

nur aus der gegebenen Verteilung einen Wahrscheinlichkeitsquotienten bilden kann, sondern daſs eben jene durch Kombinationen abzählbaren Möglichkeiten auch den Rückschluſs auf jene nach einem bestimmten Resultat zulassen — nur darf man nicht vergessen, daſs man, bevor die letzte Kugel wirklich gezogen ist, von dem unsicheren Pfade der Wahrscheinlichkeit nicht auf den gesuchten Hauptweg gelangen kann. Eine Vorfrage. Ob hier Kausalität unser Urteil mit dirigiert? Haben die Kugeln nicht ihre Stelle in dem, was vorgeht? Was mir unbekannt bleibt, die Stelle der einzelnen Webefäden, kann ich nicht unterscheiden, aber daſs sie wirklich vorhanden sein müssen, wie auch das Gewebe ausfalle, und daſs der Faden mit zum Weben gehört, läſst sich der Verstand nicht streitig machen. Die bloſsen Denkmöglichkeiten können immer nur Hirngespinste weben, und jene unwahrscheinlichen Fälle, wenn sie wirklich werden, müssen immer auch alle anderen als real möglich noch übrig lassen. Weiſs ich nur, daſs irgendwo eine weiſse oder eine schwarze Kugel ist, so müssen sie beide und nur sie beide irgendwo als sicher vorhanden konstatiert sein, wenn ich mit einer jeden von ihnen rechnen soll.

Mit jenem Rückschluſs haben wir es zunächst nicht zu thun, vielmehr knüpfen sich alle Untersuchungen für das Gesetz der groſsen Zahlen an ein Geschehen, das nur mit den vorher konstatierten oder gegebenen Wahrscheinlichkeiten verglichen wird. Als eiserner Bestand pflegt bei dieser Gelegenheit eine Reihe von Versuchen mitgeteilt zu werden, die zeigen, daſs die vorauszusetzenden Quotienten bei einer groſsen Zahl von Fällen mit ganz geringen Verzerrungen in den Resultaten wiedergespiegelt werden. Wir wollen uns an dem berühmten Beispiele von Buffon genügen lassen, das wir nach Poisson mit folgenden Angaben beschreiben. Es ist, nebenbei bemerkt, sehr schade um die schöne Zeit, die auf ähnliche Versuche verwandt worden ist; der moderne Mensch kann sie billiger haben, wenn er einen Blick auf die Ziehungsliste der Lotterie wirft, die schlieſslich im räumlichen Bilde zeigt, daſs ein jedes Tausend annähernd den gleichen Raum ausfüllt.

Buffon hatte mit dem Spiele Wappen und Schrift 2048 Versuchsreihen ausführen lassen, im ganzen sind 4040 Würfe angegeben. Es fiel

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| auf | den | 1. | Wurf | 1061 | mal | Wappen |
| " | " | 2. | " | 494 | " | " |
| " | " | 3. | " | 232 | " | " |
| " | " | 4. | " | 137 | " | " |
| " | " | 5. | " | 56 | " | " |
| " | " | 6. | " | 29 | " | " |
| " | " | 7. | " | 25 | " | " |
| " | " | 8. | " | 8 | " | " |
| " | " | 9. | " | 6 | " | " |
| | | | | 2048 | | |

Alle übrigen Würfe, 1992 an der Zahl, zeigten natürlich die Schriftseite.

Man sieht, dafs die minderwahrscheinlichen Fälle mit geringerer Frequenz erscheinen, und dafs das Verhältnis dieser 2048 dem Wappen günstigen Würfe zu der Zahl aller 4040

$$\frac{2048}{4040} = 0 \cdot 50693$$

nahezu mit der Wahrscheinlichkeit Wappen zu werfen, mit $\frac{1}{2}$, übereinstimmt. Dieses typische Beispiel lehrt nur, dafs jene Übereinkunft in der Definition sich nicht allein auf logische Momente stützt, sondern dafs wir auch in ihr eine Festsetzung getroffen haben, die ihre Rechtfertigung im wirklichen Verlaufe der Erscheinungen von neuem findet. Wir haben keinen Grund, im Wurf den Fall Wappen oder Schrift zu scheiden, aufser wenn sich der Fall vollzogen hat, und siehe da, die Fälle ordnen sich fast so an, als hätten wir es mit einer gesetzlichen Norm zu thun. Aber wer in dem Experiment Buffons etwas sähe, was sich dem physikalischen Experiment an die Seite stellen liefse, der würde sehr auf Abwege geraten. Es beweist gar nichts, es bestätigt nur unsere Erwartung, und es giebt zugleich der Definition einen Rechtsgrund, dessen wir im voraus gewifs waren, weil es einen Nonsens bedeuten würde, wenn bei gleicher Wahrscheinlichkeit der eine Fall in einer grofsen Anzahl, oder sagen wir noch bestimmter, immer den andern schlagen sollte. Physikalisch ist an diesem Resultat nichts Merkwürdiges; aber auch wenn das Unerwartete sich vollzogen und immer wieder der eine Fall sich ereignet hätte, wäre die Physik nicht in Aufregung geraten. Die Erklärung hätte sich schon gefunden. Nur hätten wir es dann nicht mehr mit jener gleichen Wahrscheinlichkeit zu thun gehabt, die Wind und Sonne zwischen den beiden

Fällen gleich verteilt wissen wollte. Für eine Reihenfolge einfachster Erscheinungen und ihre Ordnung nach einer Erklärung uns umzuthun, liegt gar kein Anlafs vor. Sie bedarf ihrer nicht, sie wäre höchst gleichgültig, und es entspricht ihr in keiner Wissenschaft irgend eine Fragestellung. Sie ist etwas Thatsächliches, kausal bedingt wie jedes Glied in der Kette der Ereignisse, aber eine Physik der Reihenfolgen ist ein Unding. Uns interessiert die Frage, wie es möglich war, dafs ein Cäsar, ein Napoleon Herren des politischen Geschehens werden konnten; aber nicht eine leere Zeit giebt einen Aufschlufs, sondern eben die Verhältnisse, die sie uns erfüllen und charakterisieren. Historische Ereignisse lassen sich nicht mit irgend einem Anspruch auf reale Möglichkeit der Folgen mathematisch kombinieren; die Nichtunterscheidbarkeit, welche die Kombination voraussetzt, raubt dem Ereignis seinen historischen Charakter, wie es ihm auch den einer physikalisch zu würdigenden Erscheinung gänzlich benimmt. Aber weil alle die Hebel, die wir sonst zur Bewältigung der uns im bunten Wechsel begegnenden Aufgaben benutzen, bei den Objekten der mathematischen Wahrscheinlichkeit versagen, dürfen wir sie doch nicht für absolut gewichtslos halten. Es sind die numerischen Verhältnisse, quantitative Bestimmungen von realster Bedeutung, die sich Geltung verschaffen. Das Geld giebt einen Mafsstab für den Reichtum der Menschen, der Städte, Staaten und Völker. Die zahlenmäfsige Charakteristik will ganz und gar nichts über den vielfältig zu differenzierenden Gebrauch aussagen, der mit dem Gelde zugleich gedacht wird; aber dafs sich die Zahlen an sich Geltung verschaffen, bezweifelt doch Niemand. Die weifsen und schwarzen Kugeln können nur erscheinen, wo sie vorhanden sind; was sie zu Tage fördert, ist uns gleichgültig, aber ihr Verhältnis interessiert uns, und je mehr sich produzieren, um so gröfser wird unser Vertrauen, dafs in dem Zahlenverhältnis der vorhandene Vorrat wirklich richtig charakterisiert werde. Der Begriff der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist definiert durch die Würfelaufgabe oder irgend eine andere dieser Art, aber sie wäre eine völlig leere Fiktion, wenn ihr nicht eben jenes wahrscheinliche Verhalten dadurch zu Hülfe käme, dafs in einer grofsen Zahl von Fällen eben jener Quotient wieder zu Tage tritt, sich manifestiert, dessen Herleitung aus lauter Denkelementen, wie wir gesehen haben, nur mit Hülfe einer gut motivierten Dekretur möglich war. Nur aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeit kommen wir nicht heraus, aus den c h a r a k t e r i s t i s c h e n werden

niemals mit Notwendigkeit ableitbare Zahlen, solange wir nicht den ganzen Vorrat von Kugeln wirklich erschöpft haben. FRIES hatte völlig Recht, dafs die „mathematische Wahrscheinlichkeit einer Voraussetzung an sich für die Vorausbestimmung nur eines einzelnen Ereignisses gar keine Bedeutung habe“. Alles, was er hierüber sagt, ist völlig zutreffend und alteriert keinen Augenblick die Bedeutung und richtige Anwendung des Begriffs, dem diese Worte viel mehr gerecht werden, als alle jene kühnen Verwechslungen, die in der Wahrscheinlichkeitslehre eher eine Anweisung zum Prophezeien, als eine Maxime sahen, vernünftigerweise unser Urteil zu dirigieren. Wenn FRIES zwischen zwei Urteilen zu wählen gehabt hätte, das eine Mal unter der Bestimmung $\frac{3}{4}$, das andere Mal mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{11}{12}$, er hätte keinen Augenblick gezögert, sich für das letztere zu entscheiden, ob in der Praxis oder in der Theorie, und das eben infolge seiner Auffassung: „dafs die Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt nur Anwendungen der Durchschnittsrechnung enthalte, indem sie sich mit der Auffindung mittlerer Verhältniszahlen für die in einem Ganzen nebeneinander möglichen Voraussetzungen beschäftigt.“ Eben seine Überzeugung, dafs mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ auch gesagt wird, dafs im Durchschnitt die Fälle dieses Verhältnis auch wiedergeben werden, berechtigt ihn zu dieser Wertung des Urteils, und er will nur, was wiederum schon im Begriffe der Wahrscheinlichkeit liegt, daran erinnern, dafs eben jener Entscheidung keinerlei Bedeutung zukommt, die es zu einer „Vorausbestimmung“ des einzelnen Ereignisses stempelte. Ihm liegt die Bedeutung der Disziplin einmal in der Anregung, die sie der Mathematik gegeben hat, dort hat sie ja aus den Tiefen des Verstandes die ganze Kombinatorik zu Tage gefördert, fürs andere Mal in der einzigen unwiderleglichen objektiven Thatsache, dafs der Durchschnitt um so wahrscheinlicher wird, je mehr Fälle wir in die Rechnung eingehen lassen. Er drückt sich etwas anders aus, aber ihm gilt das „Gesetz der grofsen Zahlen“ schon logisch; bei allem Mifsverstand, der sich an diesen Satz knüpft, ist sein Gedankeninhalt der Schwerpunkt der ganzen Disziplin. Man suche doch einmal in den Aufgaben der Wahrscheinlichkeit a priori und bestimme auf Grund der logischen oder einer anderen Theorie, wie sich die Zahl der wirklich aktuellen Aufgaben, mit denen sich etwas anfangen läfst, zur Zahl jener verhält, die nur akademischer Natur sind.

Zahlenmäfsige Angaben über irgend einen Gegenstand vermögen

zu charakterisieren, aber der Charakter, in welchem Sinne auch das Wort verwandt wird, ist kein Gesetz, dessen Notwendigkeit sich wie die Farben des Regenbogens erklären liefse. Der Buffonsche Versuch charakterisiert das Spiel, mit dem er sich so ausgiebig beschäftigt. Es ist ein sehr dürftiger Inhalt, der in Übereinstimmung mit einem Urteil befunden wird, das schon vorher, nur in anderer Form, ausgesprochen werden konnte; aber dieses hat hier seine Probe bestanden. Nicht in exakter Weise; das kann aber auch nicht verlangt werden; das Wahrscheinliche kann nur auf seinem eignen Gebiet verifiziert werden.

Ist die Zahl der Kugeln in der Urne beschränkt, so kommen wir mit jedem Zuge aus dem Gebiet weiter heraus; man mufs also schon sehr viele Kugeln haben, damit nicht die Wahrscheinlichkeit in die Gewifsheit übergehe.

Aber auch ein zweites Moment verbietet diese Form des Beispiels. Bei einer beschränkten Anzahl von Kugeln verändert jeder Zug das Verhältnis der Kugeln in der Urne, also die Wahrscheinlichkeit des Zuges, die Bernoullis Betrachtung vom ersten bis zum letzten Zug voraussetzt. Hier wird also die Voraussetzung unendlich vieler Kugeln vonnöten sein, damit die endliche Anzahl von Zügen das Verhältnis nicht alteriere. Das Würfelspiel und jedes andere, dessen Einteilung der Fälle nicht mit individuellen, abzählbaren Objekten in Verbindung steht, sondern auf mathematisch-physikalischen Erwägungen über Gestalt und Beschaffenheit eines einzigen Körpers beruht, bietet jene Unabhängigkeit der einzelnen Fälle von selbst dar, eine Eigenschaft, die in Wirklichkeit unmöglich eine absolute mathematische Bedeutung haben kann, wie wir ja auch durch eine unendliche Zahl von Kugeln nur fiktiv die konstante, sich immer gleich bleibende Wahrscheinlichkeit zu garantieren vermögen. Alle diese Fragen berühren aber Begriff und Rechnung nicht, sondern gewinnen erst eine Bedeutung, wenn man zur Anwendung schreitet; sie erschweren dieselbe nicht anders, wie etwa die Anwendung der Fallgesetze durch den Widerstand der Luft und Ähnliches kompliziert wird.

Was haben nun alle diese Betrachtungen mit dem binomischen Satze zu schaffen? Nehmen wir an, es werde gewürfelt, und es interessiere uns der Wurf einer 6; alle anderen Fälle werden zusammengefafst und konstituieren ein Ereignis für sich, dessen Wahrscheinlichkeit $q = \frac{5}{6}$ ist, wie jenes für die 6, mit $p$ bezeichnet, die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ hat. Wenn nun $\mu$ mal ge-

niemals mit ...
ganzen Vor...
völlig Rec...
Voraussetz...
zelnen ...
hierüber ...
blick d...
diese V...
wechs...
weis...
wei...
Ur... 2
m... .—1
k... μ

...keiten erschöpfen an Zahl die Glieder ...ng der $\mu$ten Potenz, die beide Elemente ...nen zur Summation bringt.

...te Rede von einem e i n z e l n e n Wurf, son- ...R e i h e n f o l g e, und an dieser interessiert zu- ...e die einzelnen Resultate aufeinander folgen, ...Verhältnis die Zahl der Würfe 6 zu der aller ...für die Rechnung bildet jener Fall den Durch- ... wollen also nach der Wahrscheinlichkeit fragen, ...en $n$ mal nacheinander die 6 und dann in allen ...ere Zahl erscheine. Die Wahrscheinlichkeit für ...ngesetzten Fall ist sodann:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^n \left(\frac{5}{6}\right)^{\mu - n}$$

...en allgemeinen Zeichen $p^n q^{\mu - n}$.

...sieht nun leicht, daſs die Würfe, wenn sie nicht in der ...hriebenen Ordnung wirklich erfolgen sollen, eine groſse ... in der Reihenfolge haben. Wäre $n = 2$, $\mu = 5$, so würden ... Fälle 6 unter allen 5 Fällen so oft erscheinen können, als ... 2 gleiche und 3 gleiche Elemente verschieden anordnen können. Mit den Symbolen $p$ und $q$ giebt das dieses Bild:

| | |
|---|---|
| $p\ p\ q\ q\ q$ | $q\ p\ q\ p\ q$ |
| $p\ q\ p\ q\ q$ | $q\ p\ q\ q\ p$ |
| $p\ q\ q\ p\ q$ | $q\ q\ p\ p\ q$ |
| $p\ q\ q\ q\ p$ | $q\ q\ p\ q\ p$ |
| $q\ p\ p\ q\ q$ | $q\ q\ q\ p\ p$ |

also 10 verschiedene Fälle, die an Zahl mit dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$$

übereinstimmen. Für den allgemeinen Fall hat man:

$$\binom{\mu}{n} = \frac{\mu!}{n!\,(\mu - n)!} = \frac{\mu\,(\mu - 1) \cdots (\mu - n + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n}.$$

Betrachtet man nun das Pascalsche Dreieck, so sieht man, dafs die Binomialkoeffizienten völlig symmetrisch zu einem gröfsten in der Mitte oder zu zwei mittleren Koeffizienten sich anordnen; es liegt also die Frage nahe, wie es sich mit den Gröfsen

$$\binom{\mu}{n} p^n q^{\mu - n}$$

verhalten wird, die nun die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, dafs nicht die Reihenfolge, sondern das Verhältnis

$$n : (\mu - n)$$

streng innegehalten wird. Die Koeffizienten $\binom{\mu}{n}$ können wir leicht am Dreieck verfolgen; für den Fall $p' = q' = \frac{1}{2}$, der hier nicht in Frage steht, wird der Faktor:

$$p'^n q'^{\mu - n} = p'^{\mu} = q'^{\mu}$$

so dafs also das mittlere oder beide mittlere Glieder am gröfsten werden.

Ist $\mu$ gerade, so sind die Exponenten beide $= \frac{\mu}{2}$; ist $\mu$ ungerade, so haben wir die Glieder

$$\binom{\mu}{\frac{\mu - 1}{2}} p'^{\frac{\mu + 1}{2}} q'^{\frac{\mu - 1}{2}} \text{ und } \binom{\mu}{\frac{\mu + 1}{2}} p'^{\frac{\mu - 1}{2}} q'^{\frac{\mu + 1}{2}}$$

die gleich und am gröfsten sind, d. h. aber z. B.: diejenigen Mischungsverhältnisse von $s$ und $w$ Kugeln sind beim Ziehen am wahrscheinlichsten, in welchen entweder gleichviel von beiden vorhanden sind, oder der Unterschied in der Frequenz die Einheit ergiebt. Dieser wahrscheinlichste Wert schwebt aber nicht in dem Äther des reinen Denkens, sondern er hat zur Voraussetzung, dafs beim Füllen der Urnen oder wie sonst die Kugeln angehäuft waren, bei jeder einzelnen a priori die Wahrscheinlichkeit für $w$ und $s$ gleich gewesen ist.

In unserem allgemeineren Beispiele fallen auch die Werte $p$ und $q$ mit ihren Potenzen für die Frage nach dem gröfsten Werte von $\binom{\mu}{n} p^n q^{\mu - n}$ mit ins Gewicht. Indessen läfst sich auch für

diesen Fall eine leichte Entscheidung treffen. Beachtet man, dafs für einen gröfsten Wert $w$ unter dreien

$$w_1 < w > w_2$$

die vorstehende Ungleichung in

$$1 < \frac{w}{w_2} \text{ und } \frac{w_1}{w} < 1$$

sich umformen läfst, so werden wir, unsern Maximalwert

$$w = \binom{\mu}{n} p^n q^{\mu - n}$$

und die beiden anderen

$$w_1 = \binom{\mu}{n-1} p^{n-1} q^{\mu - n + 1}$$

$$w_2 = \binom{\mu}{n+1} p^{n+1} q^{\mu - n - 1}$$

gesetzt, die Bedingungen

$$\frac{w}{w_2} = \frac{n+1}{\mu - n} \frac{q}{p} > 1$$

$$\frac{w_1}{w} = \frac{n}{\mu - n + 1} \frac{q}{p} < 1$$

erhalten, die wegen $p + q = 1$ $(\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1)$ nach leichter Rechnung

$$n > \mu p - q$$

$$n < \mu p + p$$

zur Folge haben. Man kann nun der Einfachheit wegen das so bestimmte

$$n = \mu p, \text{ also } \mu - n = \mu - \mu p = \mu(1 - p) = \mu q$$

setzen, den etwaigen Bruch aufser acht lassend, und erhält damit den Satz, dafs diejenige Verteilung der Ereignisse die wahrscheinlichste ist, in welcher sich die Zahl der Fälle pro und contra wie

$$\mu p : \mu q = p : q, \qquad \text{also hier} = \tfrac{1}{6} : \tfrac{5}{6}$$

verhält. Wenn wir sehr viele Male würfeln, so werden wir also sagen dürfen: Die Zahl der Würfe 6 wird sich zur Zahl aller überhaupt mit r e l a t i v gröfster mathematischer Wahrscheinlichkeit wie

$$1 : 6$$

verhalten, und jedes andere Verhältnis wird minder wahrscheinlich sein.

Der mathematische Gang der Untersuchung setzt in erster Linie die Wahrscheinlichkeiten $p$ und $q$ voraus und ruht in zweiter Linie auf der Anschauung, innerhalb welcher jene Anordnungen vollzogen und die Gröfsenverhältnisse gemessen werden. Hier ist also keine Antwort auf ein Warum zu finden, man müfste denn

den Beweis irgendwie modifizieren, um von neuem sein Warum vergeblich daran anzuknüpfen. Die Frage hört hier auf, wenn der Beweis gelingt, und Niemand vermag z. B. auf die Frage zu antworten: Warum ist es nun so, dafs das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten ist? Wir können nicht mehr weiter, weil die Bedingungen der Erkenntnis die Grenze bilden für das, was überhaupt gewufst werden kann. Wir fragen nach der Möglichkeit eines andern Raumes; aber warum wir unsere Anschauung und keine andere haben, ist kein lösbares Problem. Jene Bedingungen aufzusuchen, alles Erklärbare auf diese letzte thatsächliche Instanz zurückzuführen, ist die entdeckerische Aufgabe der Erkenntnistheorie. Hier den Kausalitätsbegriff oder irgend eine andere Kategorie des Denkens weitergreifen lassen zu wollen, ist eine Verlockung der Phantasie, der wir widerstehen müssen, weil wir die Kontrole aufgeben, die nur innerhalb der Erkenntnis selbst möglich ist.

Wie ist es nun auf der andern Seite? Warum sieht der gesunde Verstand als sehr wahrscheinlich vorher, dafs die BUFFONschen Versuche und alle ähnlichen den wirklich eingetretenen Erfolg haben würden? Hier haben wir zwei Ereignisse, an denen nichts zu erklären wäre, das nicht innerhalb unserer wissenschaftlichen Erfahrung zur Befriedigung geleistet werden kann. Es sollen viele Proben unter denselben Bedingungen vorgenommen werden, die zwar in aller Schärfe nicht erfafsbar sind, von denen aber eine ganz bestimmte, feste Richtung des Geschehens mit Fug geleugnet werden kann. Alle Analogien, die Verhältnisse des Spielraums, oder was sonst gewählt wird, bringen den Verstand um keines Haares Breite dem Problem näher. Und wenn wir Fall für Fall in der exakten Weise der Physik zu beschreiben vermöchten, wenn wir uns danach durch graphische Darstellung in der blassesten und daher übersichtlichsten Weise alle Bewegungen symbolisieren wollten, die wir mit Notwendigkeit zuvor abgeleitet haben, so hätten wir das thatsächliche Geschehen erklärt, — aber nicht den Schlüssel für die Beurteilung irgend einer folgenden Beobachtungsreihe gefunden. Entweder Wappen oder Schrift, beide sind gleichwahrscheinlich; folgt daraus mit Notwendigkeit, dafs am wahrscheinlichsten die gleiche Verteilung beider in einer Reihe von Würfen sei? Oder ist es nur ein natürlicher Trieb, wie ihn nach BERNOULLI auch der Dümmste empfindet, der dieses Urteil auslöst? BUFFON hatte bis zu 8 Würfen registriert, in der sich immer das-

selbe Resultat gezeigt hatte; in 6 Fällen war erst der 9. Wurf Wappen gewesen (s. o. S. 142). Warum soll nicht auch eine „prinziplose Kombination“ noch gröfsere Abweichungen herbeiführen können? Wir kommen nimmer aus den Anthropomorphismen heraus, wie wir uns auch wenden mögen. Das Urteil, dafs die gleiche Verteilung auch die wahrscheinlichste sei, soll nach Fries schon logisch gestützt sein. Was heifst das nun? Giebt es eine logische Gültigkeit, die über ein Geschehen etwas aussagt und mit ihrem Zwang auch unser Urteil über Zukünftiges einschnürt, dafs es so und nicht anders gedacht werden kann? Die behauptete logische Gültigkeit kann nicht wohl den Formen unseres Denkens zugesprochen werden. Alle Syllogismen sind nicht gültig oder ungültig; sondern sie sind vorhanden, oder sie sind nicht vorhanden. Ein Trugschlufs ist etwas, das nicht im Denken nachweisbar ist, sondern eine falsche Anwendung jener Formen auf den Inhalt. Es ist hier nicht anders als bei den reinen Anschauungen Raum und Zeit. In Thatsächlichem, das nicht weiter subsumierbar ist, kann kein Irrtum liegen, so schwer es sein mag, dieses niemals unmittelbar Gegebene durch die Analyse aufzufinden. Man löse den Trugschlufs in seine Elemente auf, und man wird auf etwas stofsen, das nicht gedacht werden kann, wie ein schwarzer Schimmel, oder das nicht angeschaut werden kann, wie zwei Linien, die verschiedene Richtung haben und auf ein- und derselben Ebene in demselben Punkte senkrecht stehen.

Jene logische Gültigkeit wird also notwendig zu interpretieren sein, und es wird sich fragen, welcher Inhalt dem Begriffe „gleichwahrscheinlich“ beizulegen ist, ob er nicht etwa alles enthält, was in jenem sekundären Urteil ausgesprochen wird: Eine gleiche Verteilung der Fälle ist wahrscheinlicher als eine jede andere.

In der That ist dieser zweite Schritt mit dem ersten völlig gegeben. Nur die Zahl der Möglichkeiten verändert sich und erfordert als neuen Schritt die Bildung der Kombinationen. Wer diese aufstellen und annehmen wollte, dafs irgend eine andere als gleichviel Wappen und gleichviel Schrift wahrscheinlicher als diese sei, der würde damit auch die Voraussetzung gleichwahrscheinlicher Fälle umstossen.

Wer die gleiche Verteilung der Fälle als die wahrscheinlichste behauptet — bei gleicher Wahrscheinlichkeit der entgegengesetzten Ereignisse —, der wiederholt nur an jedem einzelnen Falle, den er betrachten will, denselben Gang der Erwägungen, mit denen der Begriff überhaupt sich geltend macht. Und sind die Wahrschein-

lichkeiten von vornherein verschieden, so ist es auch nicht anders. Nicht einem dunklen Triebe folgend, sondern klar und verstandesgemäfs wird das spezielle, für einen Fall ausgesprochene Urteil verallgemeinert, und wer dafür die formelle Beweisführung nötig hätte, dem stünde sie in der Gestalt einer apagogischen Demonstration zur Verfügung, die ja immer darauf ausgeht, aus der Annahme des kontradiktorischen Gegenteils und der sich ergebenden Widersprüche die Wahrheit der Behauptung zu erweisen. In den so beweisbaren Sätzen liegt schon eine Beschränkung auf den früheren Wissensstand; daher stammt ihre Verwendbarkeit bei der Umkehrung von Urteilen und bei Sätzen von negativer Bedeutung, die in der Mathematik z. B. niemals aufs neue Ansprüche an die Anschauung stellen. Der Widerspruch trifft den Begriff, aber in der Mathematik ist dessen Inhalt immer der Anschauung entnommen, die auch das Ungereimte unmittelbar zum Bewufstsein bringt, gleichviel, ob es sich um zwei Senkrechte handelt, die nicht in einem Punkte auftreffen können, oder ob aus dem um 1 vergröfserten Produkte aller Primzahlen bis zu $p$ gefolgert wird, dafs $p$ nicht die gröfste existierende Primzahl sein könne.

Gesetzt, das Ereignis $E$ und das entgegengesetzte $E'$ haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, so ist es für $2\mu$ Ereignisse $E$ oder $E'$ am wahrscheinlichsten, dafs $\mu$ Ereignisse $E$ und $\mu$ Ereignisse $E'$ auftreten, denn wäre das nicht, sondern eine andere Verteilung wahrscheinlicher, so wären ja $E$ und $E'$ nicht gleichwahrscheinlich, also . . . . . . q. e. d.

Es ist nicht schwer, des weiteren zu zeigen, wie diese Argumentation, die lediglich auf dem Begriffe der gleichwahrscheinlichen Fälle ruht, und die mir auf Grund einer abweichenden Definition und einer anderen Voraussetzung über dessen Bedeutung nicht mehr bindend erscheinen will, auf einige Resultate führen kann, die zugleich mit dem Bernoullischen Satze und ihm inhärierend ausgesprochen zu werden pflegen.

Man bedarf dazu nicht des ganzen Rechenapparats, den Jakob Bernoulli aufgeboten hat, und uns seiner zu enthalten, kann zeigen, wie fest der gewählte Mechanismus der Rechnung den aus dem gemeinen Verstande entnommenen begrifflichen Elementen sich angliedert. Diesem ist nur eigen die Aussage gleicher und ungleicher Wahrscheinlichkeit. Jene superlative Bestimmung eines wahrscheinlichsten Falles ist eine relative, und das gewählte Mafs allein kann eine absolute Gröfsenangabe herstellen. Nehmen wir

den Fall gleicher Wahrscheinlichkeit für zwei sich gegenseitig ausschliefsende und allein mögliche Einzelereignisse, so ist die absolut gleiche Verteilung in einer grofsen und geraden Anzahl von Wiederholungen die wahrscheinlichste. Jede andere Verteilung ist minder wahrscheinlich, und die extremen Fälle bilden nach beiden Seiten den Abschlufs mit der geringsten Wahrscheinlichkeit. Wenn wir nun die möglichen Fälle miteinander vergleichen und sie zahlenmäfsig anordnen, so wird von der Mitte aus jeder Nachbar nach rechts und links weniger wahrscheinlich werden. Das einzusehen braucht man den binomischen Satz nicht, wenn auch die ganze Anordnung der Fälle eine arithmetische ist, welche die einfache Kombination voraussetzt; also z. B. für 6 Fälle $w$ oder $s$ hätte man

$$6\,w, \quad 5\,w\,1\,s, \quad 4\,w\,2\,s, \quad 3\,w\,3\,s, \quad 2\,w\,4\,s, \quad 1\,w\,5\,s, \quad 6\,s$$

zu unterscheiden. Ein einfacher Beweis liefse sich mit Leichtigkeit auch für den allgemeineren Fall ungleicher Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse erbringen, indem man wiederum indirekt verfährt oder durch passende Zerfällung unmittelbar die Behauptung nachweist. Wenn man die Reihenfolge von vornherein vorschreibt, so mufs notwendig mit der Zahl der Versuche auch die Wahrscheinlichkeit einer jeden Kombination geringer werden, als irgend eine andere, die weniger Fälle einschliefst. Zusammengesetzte, in ihren Elementen nur wahrscheinliche Ereignisse werden minder wahrscheinlich, als die einfachen Komposanten es sind, und nur die Möglichkeit, dafs die Zusammensetzung selbst auf mannigfache Weise hergestellt werden kann, vermag dies Verhältnis zu ändern, eben wenn man sich des Anspruchs einer ganz bestimmten Reihenfolge begiebt. So ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel 6 zu werfen, $\frac{1}{6}$, für eine andere Zahl $\frac{5}{6}$, aber bei zwei Würfen findet man für die Fälle

| 2 mal 6, | 2 mal nicht 6, | 1 mal 6, 1 mal nicht 6, |
|---|---|---|
| $\frac{1}{36}$ | $\frac{25}{36}$ | $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$ |

also für die letzte Eventualität $\frac{5}{18}$, einen Wert, der gröfser ist, als die einfache Wahrscheinlichkeit, 6 zu werfen, die nur mit $\frac{3}{18}$ gewertet ist. Sieht man von der Reihenfolge ab, so kann das Resultat, auf das es nun abgesehen ist, durch die Kombination verschiedener Einzelresultate sich herstellen; es wird nicht mehr die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse allein, von denen ja das eine oder andere immer sicher ist, sondern die Zahl der wirklich möglichen Verknüpfungen mit in die Wagschale fallen. Man sieht ohne weiteres ein, dafs es wahrscheinlicher ist, in 10 Würfen 6 zu werfen,

als in einem einzigen Wurfe, und dafs allgemein in der Herabminderung der Bestimmungen für den begrifflich zu fixierenden Fall immer eine Erhöhung der Wahrscheinlichkeit liegen mufs.

Von diesem Mittel, ausgehend von einer geringeren Wahrscheinlichkeit zu einer immer gröfseren zu gelangen, wird im BERNOULLIschen Satze Gebrauch gemacht, und die FRIESsche Behauptung, dafs man den einzelnen Fall zwar nicht vorauszusehen vermag, dafs die Bestimmung seiner Wahrscheinlichkeit keinerlei wesentliche Bedeutung für die Voraussage haben kann, raubt dem Begriffe weder für die Praxis noch für die Theorie irgend etwas von seinem Werte, wenn dieser sich auch nur geltend machen kann, wofern es gelingt, vom minder Wahrscheinlichen immer mehr in die Nähe der Gewifsheit zu gelangen. Das kann nur in Übereinstimmung mit dem gesunden Menschenverstand oder gar nicht geschehen. Man sieht ein, dafs der wahrscheinlichste Fall derjenige ist, für den die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten sich im Verhältnis der wirklich konstatierten Fälle manifestieren; dieser wahrscheinlichste Fall tritt nun wirklich oder angenähert ein; bleibt da noch eine Frage nach Erklärung offen? Mehr als einsehen kann man doch eine Erscheinung nicht.

Die „logische Gültigkeit“ des BERNOULLIschen Satzes ruht auf der Richtigkeit der zugrundeliegenden Begriffe, die der Verstand den realen Voraussetzungen entsprechend gebildet hat. Seine Evidenz bedarf weder einer Hypothese noch neuer Denkelemente; nur das gewählte Mafs hat sich in den richtig gezogenen Konsequenzen zu bewähren. Die Probe aber erhebt das M a f s s e l b s t nicht in den Rang einer Denknotwendigkeit; es ist nur zweckmäfsig, und warum es das ist, diese Frage beantworten die Leistungen, welche wir den echten Brüchen und der Einheit, dem Werte der Gewifsheit in den Rechnungsoperationen zumuten, und der Erfolg, den wir von ihnen, soweit sie einen Sinn behalten, zu erwarten berechtigt sind. Eine doppelte und dreifache Gewifsheit ist sinnlos, aber die Gewifsheit zweier Fälle, von denen ein jeder eintreten mufs, bleibt dieselbe, und daher multiplizieren wir $1 \times 1$, wenn es die Aufgabe verlangt. Die halbe und gedrittelte Gewifsheit ist ein Nonsens, und daher rechnen wir mit Wahrscheinlichkeiten, die unsere Übereinkunft in ein beschränktes Mafs von Rechnungsoperationen hineinbannt. Der ganze Zahlenraum jenseits der 1 ist ihr natürlich verschlossen; alle Resultate liegen zwischen 0 und 1, und die Multiplikation, welche in dem sinnreichen Apparate das

Verhältnis zwischen günstigen und allen möglichen Fällen aufrecht zu erhalten hat, ist im Grunde die Hauptoperation des Kalkuls. Wo wir addieren, umgehen wir die auch wohl unmittelbar ausführbare Zählarbeit, günstige und alle Fälle zu ermitteln, sind aber sicher, dafs die Summe 1 bei richtiger Anwendung so wenig überschritten werden darf, als sie bei echt gebrochenen Faktoren überhaupt in die Erscheinung treten kann.

Die Behauptung, dafs der wahrscheinlichsten Verteilung der Ereignisse in einer Versuchsreihe das Verhältnis der Einzelwahrscheinlichkeiten entspricht, entstammt dem Begriff, wie er sich im gemeinen Verstande vorfindet. Sie ist tautologisch oder, wenn man lieber will, ein analytisches Urteil. Jener Gewifsheit, das Verhältnis bei einer beschränkten Zahl von Kugeln, die nicht zurückgelegt werden, zur Geltung zu bringen, entspricht auf dem Gebiete des Wahrscheinlichen die Erwartung, dafs unter Aufrechterhaltung desselben Status in einer grofsen Zahl von Fällen eine jede individuelle Kugel ungefähr gleich oft ergriffen werde. Wie verhält es sich nun, wenn die Zahl der Versuche gesteigert wird, und nicht nach der Wahrscheinlichkeit des ausgezeichneten Falles, sondern gefragt wird: Ist dieser wahrscheinlicher bei einer kleineren oder bei einer gröfseren Versuchsreihe?

Bei 60maligem Würfeln ist die wahrscheinlichste Kombination

10 mal 6, 50 mal nicht 6

bei 120 Würfen

20 mal 6, 100 mal nicht 6

Ist das erste oder zweite Resultat wahrscheinlicher? Kann der gewöhnliche Begriff die Entscheidung der Frage herbeiführen, oder ist hierzu die Hülfe des Kalkuls notwendig?

Der unbefangene Verstand ist geneigt, zu meinen, es sei bei einer Vergröfserung der Versuchszahl auch leichter, die wahrscheinlichste Verteilung zu erhalten, während die Rechnung, wie bekannt, gerade umgekehrt entscheidet. Wenn es bei Stumpf heifst: „Die absolute Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen Verteilung wird natürlich immer geringer, aber die Abnahme erfolgt am langsamsten bei derjenigen, die dem Verhältnis der Chancen $m$ und $n$ (möglichst) entspricht, immer schneller dagegen, je weiter sich eine Verteilungsart davon entfernt", so will uns das Beiwort „natürlich" angesichts der komplizierten arithmetischen Betrachtung, welche das Resultat in den Lehrbüchern fordert und angesichts der folgenden Überlegung, nicht recht am Platze erscheinen.

Nehmen wir an, die 60 Würfe mit 10 mal 6 und 50 mal nicht 6 wären sicher, so würden wir für die folgenden 60 Versuche die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles als ein Maximum für 120 Fälle haben, von welchen also 60 als sicher, und zwar mit der günstigsten Kombination, vorauszusetzen sind. Jede andere Verteilung der ersten 60 Fälle hätte die Wahrscheinlichkeit, in 120 Würfen die normale Verteilung zu erlangen, herabgedrückt. So würde z. B. das Resultat 15 mal 6, 45 mal nicht 6 als Ergänzung die Kombination

5 mal 6, 55 mal nicht 6

verlangt haben; die Wahrscheinlichkeit also, in 120 Fällen die normale Verteilung zu erhalten, wäre nach 60 sicheren Würfen geringer geworden. Nun ist aber für den Fall des Maximums die Wahrscheinlichkeit auch nur dieselbe, welche der ersten Versuchszahl zukommt; geben wir also die Voraussetzung des günstigsten Falles in den ersten 60 Würfen als eines sicheren auf, so mufs auch die Wahrscheinlichkeit, in 120 Fällen auf die wahrscheinlichste Verteilung zu kommen, welche wir als die normale bezeichnet haben, geringer werden. Allgemein gesprochen seien $p$ und $q$ die Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzten Ereignisse, $E$ und $E_1$, gleichviel wie wir $p$ und $q$ definiert hätten, wofern nur die Definition die relativen Gröfsenverhältnisse der Wahrscheinlichkeiten und der Zusammensetzungen aufrecht erhält, so ist die Wahrscheinlichkeit $(A)$, in

$\mu(p+q)$ Fällen $\mu p$ mal $E$, $\mu q$ mal $E_1$

zu erhalten, gröfser als diejenige $(B)$, in

$2\mu(p+q)$ Fällen $2\mu p$ mal $E$, $2\mu q$ mal $E_1$

zu erreichen. Denn man nehme für den zweiten Fall an, die ersten $\mu(p+q)$ Resultate zeigten sicher

$\mu p$ mal $E$, $\mu q$ mal $E_1$,

so wäre für

$2\mu(p+q)$ Wiederholungen die Wahrscheinlichkeit, $2\mu q$ mal $E$, $2\mu q$ mal $E_1$ zu erhalten, gleich $(A)$. Nun ist aber diese als sicher vorausgesetzte Verteilung für die ersten $\mu(p+q)$ Fälle die günstigste, welche den beabsichtigten Gesamterfolg herbeizuführen in der Lage ist; in der That ist sie aber nicht sicher, vielmehr ist sie, obgleich und weil die wahrscheinlichste, eben nur wahrscheinlich; es kann also auch die Wahrscheinlichkeit $(B)$ weder gleich noch gröfser als $(A)$, d. h. nur kleiner als $(A)$ sein.

Diese etwas schwerfällige Schlufskette setzt nur in den Be-

stimmungen $\mu p$ und $\mu q$, sonst aber ganz und gar nicht voraus, dafs wir unter $p$ und $q$ die von uns definierten Gröfsen, das Verhältnis der günstigen zur Zahl aller möglichen, verstehen, so wenig wie die Symbole $(A)$ und $(B)$. Sie tragen nur dem Rechnung, was im Begriff des Wahrscheinlichen und des Wahrscheinlicheren liegt. Es ist nicht richtig, was Elsas behauptet: „Die allgemeine Wahrscheinlichkeitsfrage lautet: ist es wahrscheinlich oder unwahrscheinlich?“ Freilich heben die sich unmittelbar anschliefsenden Worte, nach denen „man oft nur diese Alternative entschieden haben“ will, die Behauptung wieder auf, indem sie jene Fragestellung, wie mir scheinen will, als eine ganz spezielle aus dem allgemeinen Bezirk herausheben. Nur wo wir zwei disjunkte Fälle zu beurteilen haben, trifft die Behauptung zu; in allen anderen Anwendungen überwiegt die allgemeinere Aufgabe, uns über eine unter mehreren verschiedenen Eventualitäten als solche von gleicher oder ungleicher Berechtigung im Urteil zu entscheiden. Die allgemeinere, dem täglichen Gebrauch eigene Fragestellung hat es nur mit dem Vergleich von Wahrscheinlichkeiten zu thun, deren absolute Gröfse mangels eines Mafses nicht angebbar ist, der aber, wie die Komparation überhaupt, den Begriff des Gröfser und Kleiner notwendig im Urteil voraussetzt. Selbst bei Attributen, die weder extensive Bestimmungen bedeuten, noch sich, wie das bei physikalischen Eigenschaften immer der Fall ist, auf solche reduzieren lassen, also bei allen Adjektiven von intensiver Bedeutung, wie gut und böse, fromm und ungerecht, weisen die Unterschiede, welche wir markieren, auf Bewufstseinselemente zurück, die in der Anschauung wurzeln. Gleichviel, ob intensive Bestimmungen nur graduell unterscheidbar sind, oder ob sie ein absolutes Mafs verstatten; der Begriff der Wahrscheinlichkeit hat jedenfalls Eigentümlichkeiten, welche die Kardinalfrage: Welche Ansprüche haben wir an eine absolute Fixierung, wenn sie als möglich gedacht wird, zu stellen? zu beantworten erlaubt. Hier liegen Denknotwendigkeiten. Weifs ich, dafs ein Ereignis nur wahrscheinlich ist, so wird eine durch Spezialisierung oder Zusammensetzung indizierte Steigerung der Bedingungen ein zweites Ereignis bedeuten, das minder wahrscheinlich ist, als das erste. Ist ein Ereignis zusammengesetzt aus einem sicheren Geschehen und einem nur wahrscheinlichen, so wird ein zweites, kongruierendes, für welches an die Stelle dieses sicheren Geschehens nur ein wahrscheinliches tritt, minder wahrscheinlich werden. Indessen darf man jene

Steigerung der Bedingungen nicht formell, sondern nur auf Grund einer sei es sicheren oder mindestens wahrscheinlichen Annahme, vollziehen. Wenn ich weifs, dafs in einer Urne nur weifse, schwarze, rote oder grüne Kugeln sich vorfinden, ohne dafs ich ihre zahlenmäfsige Verteilung kenne, so darf ich nicht behaupten, dafs es wahrscheinlicher ist, eine $w$, $s$ oder $r$ zu ziehen, als eine grüne, indem ich mit dem einen Prädikat gegen drei lediglich die logische Einschränkung als Verschärfung der Bedingungen gelten lasse, wie es die STUMPFsche Theorie vorschreibt. Die völlige Unwissenheit kann die immerhin mögliche, aber durch nichts gestützte Verteilung nicht wahrscheinlich machen. Von jenen Gröfsen $p$ und $q$ werde ich also, wenn ich sie absolut gebrauchen will, fordern, dafs sie Eigenschaften des Begriffs zum Ausdruck bringen, und dafs den Rechnungsoperationen, welche der Natur entsprechend zulässig sind, nicht blofs ein Sinn verbleibt, sondern dafs die Grundlagen der ersten Bestimmungen auch in den Resultaten gewahrt bleiben.

Jenes Schlufsverfahren ist nun so sicher, dafs man es als einen Beweis für den Satz ansehen kann, nach welchem die Gröfse

$$\frac{\mu!}{\mu p!\ \mu q!}\, p^{\mu p}\, q^{\mu q} \qquad (\alpha),$$

eben jene Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falls, sich mit wachsendem $\mu$ der Null nähert, beruhigt ansehen kann — ähnlich wie die Behauptung, dafs der bekannte Quotient

$$\frac{\mu!}{\alpha!\ \beta!\ \gamma!\cdots} \qquad \left[\alpha+\beta+\gamma+\cdots\leqq\mu\right]$$

eine ganze Zahl ist, lediglich auf Grund seiner Bedeutung als eines kombinatorischen Zählausdrucks als evident anerkannt wird.

Es ist einleuchtend, dafs die arithmetische Betrachtung mit all diesen Erörterungen sich nicht aufzuhalten nötig hat. Unsere Absicht ist ja eine wesentlich andere; es liegt uns daran, die in die Rechnung verwobenen Fäden des gemeinen Verstandes wieder blofszulegen, was ohne Weitläufigkeiten nicht zu erreichen ist.

Jenes letzte, das zweite Resultat des BERNOULLIschen Theorems, wird gewöhnlich mit Hülfe der STIRLINGschen Näherungsformel für grofse Fakultäten gewonnen. Wenn man in dem Ausdruck ($\alpha$) diese Beziehung

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n = n^n\, e^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

anwendet ($e$ bedeutet die Basis des natürlichen Logarithmensystems), so geben einige leichte Reduktionen für

$$\frac{e^{-\mu}\mu^{\mu}\sqrt{2\pi\mu}\,p^{\mu p}q^{\mu q}}{e^{-\mu p}(\mu p)^{\mu p}\sqrt{2\pi\mu p}\,e^{-\mu q}(\mu q)^{\mu q}\sqrt{2\pi\mu q}}$$

unter Berücksichtigung von $p + q = 1$ das angenäherte Resultat

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

als Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles, eine Gröfse, die das veränderliche $\mu$, aber sonst nur konstante Gröfsen im Nenner hat, also in der That mit wachsenden $\mu$ immer mehr abnimmt.

Während nun diese Gröfse, obwohl in der Binomialentwicklung alle anderen an Wert übertreffend, immer abnimmt, liegt auf der Hand, dafs auch jedes irgendwann in die Erscheinung tretende Kombinationsverhältnis $\alpha : \beta$ a fortiori im weiteren Verlaufe bei gesteigerter Versuchszahl an Wahrscheinlichkeit verlieren mufs.

Auch den weiteren Verlauf der Bernoullischen Untersuchungen kann man sich ohne exakte, mathematische Auswicklung des Binoms für einen grofsen Exponenten aus der Denkungsweise des gesunden Verstandes heraus vor Augen führen.

Je mehr Versuche angestellt werden, um so zahlreicher werden auch die Kombinationen, in welchen das Schlufsresultat charakterisiert werden kann. Auf eine Bestimmung der Reihenfolge ist von vornherein verzichtet worden, und trotz dieser Herabminderung der Ansprüche wurde gezeigt, dafs auch die normale Kombination, wie die wahrscheinlichste Verteilung heifsen möge, immer mehr an Wahrscheinlichkeit einbüfst. Aber man wird leicht einsehen, dafs, je gröfser $\mu p$ und $\mu q$ werden, die Fälle, welche sich unmittelbar um sie herum gruppieren, wie die Kombinationen

$$\mu p \pm 1, \qquad \mu q \mp 1, \qquad \mu p \pm 2, \qquad \mu q \mp 2, \cdots\cdots\cdots,$$

sich auch immer weniger im Urteil von dem normalen Falle unterscheiden. Wenn man bei gleicher Wahrscheinlichkeit in 10000 Versuchen auf die Fälle 5000, 5000; 4999, 5001; 4998, 5002 u. s. w. reflektiert, so wird für unser Urteil überhaupt eine Differenz kaum eine andere Wirkung als eine formale haben. Ich werde sagen müssen, dafs

4990 $w$, 5010 $s$

im Wappen- und Schriftspiel minder wahrscheinlich sind, als

5000 $w$, 5000 $s$,

aber auf den Unterschied wird kein Mensch in der Weise reagieren, dafs er auch nur eher auf die letztere Kombination als auf die erstere

eine Wette einginge, während weiter entfernte Verteilungen, z. B.

2000 *w*, 8000 *s*,

ohne jeden Zweifel und auf den ersten Blick eine viel geringere Wahrscheinlichkeit von uns zugesprochen erhalten. Die an den äufsersten Grenzen auftretenden Kombinationen

10000 *w*, 9999 *w* 1 *s*, 9998 *w* 2 *s*,·····

haben eine so minimale Wahrscheinlichkeit, dafs wir sie nur, weil sie doch nicht unmöglich sind, aus eben denselben formalen Gründen mit in die Erwägung ziehen. Was in dem Versuche Buffons, der in 2048 Versuchsreihen 6 mal an 9ter Stelle zum erstenmal Wappen traf, noch vorkam, wird bei einer Erhöhung der Stelle zwar nicht unmöglich, d. h. seine Position und sein Geschehen führt keinerlei Widerspruch mit sich, indessen wird sich Niemand sträuben, diese extremen Fälle aus seinen Rechnungen, wo es auch sei, auszuscheiden, ohne sich über den Fehler die geringsten Skrupel zu machen.

Man wird sich nun leicht vorstellen können, dafs ein weiterer Verzicht in der Bestimmung des zu beurteilenden Falles wieder zu einer Erhöhung der Wahrscheinlichkeit führen kann, wenn man nicht blofs die Reihenfolge, sondern auch die fest charakterisierte Kombination aufgiebt. Dafs man sich mit den extremen Fällen nicht befassen wird, liegt am Tage, und wenn man die normale Kombination mit gleichviel Nachbarn nach rechts und links in die Beurteilung einschliefst, so giebt man dem Geschehen einen Spielraum, dessen Innehaltung von vornherein eine immer gröfsere Wahrscheinlichkeit erhält, wenn man die Grenzen immer weiter setzt. Man ist ja zunächst völlig frei in der Festsetzung der Möglichkeiten, die ausgeschlossen werden sollen. Es fragt sich nur, ob die exakte Wägung der Rechnung hier an Stelle der rohen Schätzung eine scharfe, rationell begründete Vorschrift gewähren kann. Und auch das ist leicht einzusehen.

Das Gefüge der Rechnung gestattet z. B. die Frage: Wievielmal mufs ich einen Würfel fallen lassen, damit die Wahrscheinlichlichkeit, 6 zu treffen, irgend einen gröfseren Wert als $\frac{1}{6}$ annimmt? Man sieht, dafs in dieser Aufgabe die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ und die andere, nach der man zustrebt, gegeben ist, so dafs die Gleichung eine Unbekannte, die Zahl der Würfe, zu bestimmen verstattet. Die einfache Rechnung ist aus den Lehrbüchern zu entnehmen; ihr Resultat giebt für unser Beispiel in ungefährer Wertung, dafs man

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| mit 4 | Würfen | die | Wahrscheinlichkeit | $\frac{1}{2}$ |
| „ 7 | „ | „ | „ | $\frac{2}{3}$ |
| „ 14 | „ | „ | „ | $\frac{9}{10}$ |
| „ 41 | „ | „ | „ | $\frac{999}{1000}$ |

erhält; wir haben hier eine auf unserem Begriff ruhende Methode, die uns, wie Bertrand sich vorsichtig ausdrückt, aus dem Gebiete des Wahrscheinlichen in das der „Quasi-Gewifsheit" führen kann. (Man lege sich die Frage vor, ob man mit 35 regelmäfsigen Körpern, die Einem zuvor unbekannt waren, die Wahrscheinlichkeit $\frac{999}{1000}$ erhält, dafs ein Tetraeder unter ihnen sich befindet, wie es die Rechnung fordert, dafs man also 1000 gegen 1 darauf wetten dürfe.) Niemand wird zweifeln, dafs eine bestimmte Seite schon unter 7 Würfen mit Wahrscheinlichkeit erwartet werden darf, und bei 41 wird das in noch höherem Mafse der Fall sein. Es wird dies Vertrauen zu dem Resultate sich steigern lassen, wie sehr man will, und wieder darf man nicht vergessen, dafs man das Gebiet der Wahrscheinlichkeit nicht verläfst. Der gewählte Rechnungsmechanismus sorgt dafür, dafs man mit ihm vom Möglichen ebenso wenig auf das Terrain des Unmöglichen als auf das der Notwendigkeit gelangen kann. Denn die Aussage der Gewifsheit hat nur den Sinn einer Notwendigkeit. Gleichviel, ob unser Urteil $S$ ist $p$ eine logische Notwendigkeit erfüllt oder einen empirischen, geradezu zufälligen Inhalt beschreibt; wenn es ausgesagt werden soll, so mufs es auch hypothetisch notwendig so sein. Auch die vor der Erkenntnis offene Prädizierung eines $p$ ändert daran nichts. Wir sind ja immer der Gesetze oder der Bedingungen unserer Erkenntnis gewifs, welche uns die Notwendigkeit des Geschehens garantieren. Trifft der Wurf 6 beim ersten Male ein, so war er notwendig; aber wenn wir tausendmal zu würfeln gedenken, so giebt es keinen Überzeugungsgrund, der uns a priori den Wurf auch nur einer 6 als notwendig erwarten liefse.

In der Binomialentwicklung kann man die Glieder

$$\binom{\mu}{\mu p - h} p^{\mu p - h} q^{\mu q + h} + \binom{\mu}{\mu p - h + 1} p^{\mu p - h + 1} q^{\mu q + h - 1} + \cdots\cdots$$

$$+ \binom{\mu}{\mu p - 1} p^{\mu p - 1} q^{\mu q + 1} + \binom{\mu}{\mu p} p^{\mu p} q^{\mu q} + \binom{\mu}{\mu p + 1} p^{\mu p + 1} q^{\mu q - 1} \cdots$$

$$+ \binom{\mu}{\mu p + h - 1} p^{\mu p + h - 1} q^{\mu q - h + 1} + \binom{\mu}{\mu p + h} p^{\mu p + h} q^{\mu q - h}$$

zu einer Summe zusammenfassen; sie enthalten das absolut gröfste Glied und gleichviel Glieder nach beiden Seiten, nämlich $h$, im

ganzen $2h+1$. Jene Summe giebt nach elementarer Regel die Wahrscheinlichkeit dafür an, dafs bei $\mu$ Versuchen, welche nur zwei Ereignisse $E$ und $E_1$ ergeben können, das Gesamtresultat eine Kombination aufweist, die zwischen

$$\begin{matrix} \mu p - h \text{ mal } E \\ \mu q + h \;\;\text{„}\;\; E_1 \end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix} \mu p + h \text{ mal } E \\ \mu q - h \;\;\text{„}\;\; E_1 \end{matrix}$$

irgendwo ihren Platz hat, mit anderen Worten, dafs die Abweichung $h$ weder nach der einen noch nach der andern Seite überschritten wird. Setzt man in abgekürzter Schreibweise

$$\sum \binom{\mu}{\mu p + h} p^{\mu p + h} q^{\mu q - h} = \Theta$$

$$h = -h, \; -h+1, \cdots\cdots 0, \; 1, \; 2 \cdots\cdots\cdots h,$$

so sind in dieser Gleichung $p$ und $q$ ein- für allemal bekannt; unbestimmt sind die Gröfsen

$$\mu, \; h \text{ und } \Theta,$$

von welchen je zwei im Verfahren der Rechnung die dritte zu bestimmen ausreichend sind. Dafs $\Theta$ zwischen 0 und 1 liegen mufs, ist ebenso einleuchtend, wie dafs $h$ wegen

$$\mu p + \mu q = \mu$$

den Wert $\mu q$ nicht überschreiten darf, für den $\Theta$ den Wert $(p+q)^{\mu} = 1$ annimmt.

Die Gröfsen $\mu$ und $h$ sind nach der Natur der Aufgabe ganze Zahlen, so dafs nicht jedem beliebigen $\Theta$ eine Lösung entsprechen wird, indessen macht sich die Rechnung, die in der Form der Gleichung unübersteigbare Schwierigkeiten finden würde, überhaupt von dieser Einschränkung durch einen Übergang zu stetigen Verhältnissen frei, der für den Sinn der Operation völlig gleichgültig ist.

Rechnend kann man sich nun leicht überzeugen, wie die äufseren Glieder des Binoms $(p+q)^{\mu}$ immer schneller abnehmen, als die um das absolut gröfste Glied gruppierten. So klein es auch werden mag, immer bleibt sein Verhältnis zu den äufsersten Gliedern nicht allein sehr grofs, sondern dies Verhältnis kann über jede angebbare Gröfse mit wachsendem $\mu$ gesteigert werden. Ist $\mu$ gleich 100, $p = q = \frac{1}{2}$, so ist

$$\frac{1}{2^{100}} \binom{100}{50} = 0 \cdot 0795892 \cdot\cdot$$

$$\frac{1}{2^{100}} \binom{100}{25} = 0 \cdot 0000002 \cdot\cdot$$

und das Verhältnis ungefähr $= 397\,946$, während man für das

extreme Glied $\frac{1}{2^{100}}$ schon die ungeheuere Zahl $\frac{100!}{50!\,50!}$ erhalten würde. Will man sich bei gleicher Wahrscheinlichkeit der Ereignisse eine anschauliche Vorstellung der Vorgänge in der Rechnung bilden, so kann vielleicht ein Gleichnis dienen. Denkt man sich ein planparallel fest begrenztes Stück Gummi, dessen prismatisch geformte Masse sich um eine mittlere Ebene völlig symmetrisch gruppiert, senkrecht zu dieser nach beiden Seiten immer weiter ausgezogen, so dafs die Symmetrie aufrecht erhalten bleibt, während wiederum senkrecht zur Richtung dieses Zuges sich Kräfte geltend machen, die wesentlich schwächer, aber im Gröfsenverhältnis der Binomialkoeffizienten wirken, so wird dieselbe Masse sich wesentlich nach der Dimension des Zuges ausdehnen, während sie senkrecht dazu immer mehr an Raum verliert. Das heifst aber: ihr Höhenmaximum nimmt beständig, aber langsam ab, die Kurve des senkrecht zur Richtung des Zuges vorgenommenen Schnittes wird zwar in der Maximumgegend immer flacher, fällt aber von einer gewissen Stelle immer steiler nach den flachen Enden herab. In der That nähert sich das Verhältnis der Mittelglieder mit wachsenden $\mu$ immer mehr der Einheit; wie deren Verhältnis zu den äufseren Gliedern über jede Gröfse wächst, so ist das Verhältnis in unserem Beispiele für das mittlere und jedes der 2 Nachbarglieder:

$$\frac{100!}{50!\,50!} : \frac{100!}{49!\,51!} = \frac{51}{50}$$

$$\frac{100!}{50!\,50!} : \frac{100!}{48!\,52!} = \frac{51 \cdot 52}{49 \cdot 50},$$

und diese beiden Zahlen kommen der Einheit schon recht nahe.

Nach dem Vorhergehenden wird man in der Lage sein, einzusehen, was gemeint ist, wenn $h$ ein- für allemal bestimmt bleibt, und mit wachsender Zahl der Versuche $\mu$ die Gröfse $\Theta$ so grofs gemacht werden kann, dafs sie sich der Einheit immer mehr nähert. Das Verhältnis

$$\frac{\mu p - h}{\mu q + h} = \frac{p - \frac{h}{\mu}}{q + \frac{h}{\mu}}$$

wird mit wachsenden $\mu$ immer näher an das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten

$$p : q$$

heranrücken, und wir werden nunmehr den Satz aussprechen können:

Haben zwei Ereignisse $E$ und $E_1$ die Wahrscheinlichkeiten $p$ und $q$, so kann man durch steigende Zahl der Versuche die Wahrscheinlichkeit immer mehr vergröfsern, dafs das Zahlenverhältnis von $E$ und $E_1$ sich nicht aus zwei noch so eng gezogenen Grenzen entfernt.

Das von Bernoulli gerechnete Beispiel hat hier seinen Platz. In einer Urne seien 30 $s$ und 20 $w$ Kugeln; die gezogenen werden immer zurückgelegt. Es ist also $p = \frac{30}{50}$, $q = \frac{20}{50}$. Das Verhältnis der schwarzen und weifsen Kugeln soll zwischen den Grenzen

$$\frac{31}{50} : \frac{29}{50}$$

bleiben. Dies mit der Wahrscheinlichkeit

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1000}{1001}$ | zu bewirken bedarf es 25 550 | Ziehungen, |
| $\frac{10000}{10001}$ | „ „ „ „ 31 258 | „ |
| $\frac{100000}{100001}$ | „ „ „ „ 36 966 | „ |

woraus man zugleich ersieht, dafs die Wahrscheinlichkeit schneller zunimmt, als die Zahl der erforderlichen Züge.

Es sind also wesentlich drei Aussagen, die der berühmte Satz Bernoullis enthält. Aufser der soeben entwickelten dritten jene über die wahrscheinlichste Verteilung bei einer beliebigen Zahl von Fällen und die andere, welche die Abnahme auch der Wahrscheinlichkeit der normalen Verteilung ausspricht.

Die Behauptungen übersteigen zwar in den letzten Punkten den Gedankenkreis des gewöhnlichen Lebens; auch der Gebildete wird Schwierigkeiten haben, den ganzen Sinn der Betrachtungen zu erfassen, indessen enthalten sie nichts, was der gesunde Verstand bei näherer Überlegung anders denken würde. An die Rechnung tritt bei den übergrofsen Zahlen, die sie verlangt, ein Anspruch heran, den wir ohne geeignete Hülfsformeln nicht zu bewältigen imstande sind; unsere Anschauung hat es leichter, an allgemeinen Zeichen oder an symbolischer Darstellung den Operationen zu folgen, und dem Versuch, eine dem Kalkul parallele pseudo-experimentelle Veranstaltung vorzunehmen, geht sehr bald der Atem aus. Was kann es heifsen, den Zufall auf die Probe zu stellen? Denn in allen unseren bisherigen Betrachtungen haben wir eben ihn vorausgesetzt. Und doch wissen wir, dafs ihm aufserhalb unserer Gedanken nichts entspricht. Sollen wir Hypothesen machen, die uns ein Geschehen erklären, und solche, die uns die Unerklärbarkeit erklären? Wir erkennen den Zufall als Treppenwitz der Weltgeschichte, wir belächeln ihn in den naiven Äufserungen des Kindes, wir dulden ihn in der Posse und, sparsam verwandt, im Lustspiel,

wir identifizieren ihn auch wohl mit geheimnisvollen Mächten, wenn wir mit dem Gast des Polykrates dessen Schicksal erfüllt sehen, aber eine Erklärung verlangen wir nicht. Von der Tragödie erwarten wir eine Entwicklung der Charaktere; unser ästhetisches Empfinden würde verletzt sein, wenn der Sieg des Helden mit der Niederlage seiner Idee erkauft wäre, wie uns noch schwerer ankommt, ihn dem Zufall des Schicksals zu opfern. Fast scheint es, als ob Ernst und Zufall sich in einen Gegensatz bringen liefsen. Hier die straffe Disziplin der Kausalität, der Gesetze, dort das lockere Gebaren eines Kobolds — des Zufalls. Und nun will es uns bedünken, als könnten wir ihn einfangen und zu ernster Arbeit zwingen. Wir geben ihm in allen unseren Aufgaben und Exempeln einen Spielraum — das ist richtig. Der Zwang unserer Anordnungen bannt ihn in einen bestimmt abgegrenzten Bezirk, aber ist er ihm so unterthan, dafs er innerhalb der von uns gesteckten Grenzen nach allen Richtungen in gleicher Weise pendeln mufs, wie ein Ätherteilchen im natürlichen Licht ein Azimut nach dem andern aufsucht? Da ist keine bevorzugte Richtung, und wir sind sicher, dafs alle Teile des Raumes in gleicher Weise bedacht werden. Hätte Laplace recht mit seinem mystischen Ausgleichungsprozess, der Ordnung in die Welt, und Poisson mit dem Normalzustand, welcher den Zufall in der Welt auf das Schema des Trägheitsgesetzes in der Mechanik bringt? Hier ist ein ursachloses, völlig normales, ein kombinatorisches Geschehen, in dem die Anordnungen sich ablösen wie im Verstande des kombinierenden Mathematikers, und diesem esoterischen Stillleben stehen nur die Gewalten der störenden Ursachen aufserhalb entgegen. Eine zweite Welt in der Welt, deren vernünftige Bewohner wiederum die Immanenz des Getriebes nicht verstehen können, und deren Blicke beständig nach dem jenseitigen Anstofs durch die Natur ihres Intellekts gerichtet werden?

Wie auch unsere Erklärungsversuche sich abmühen, wir kommen nicht darüber hinaus, dafs diese 6 Würfelseiten immer da sind, dafs eine jede immer aufliegen kann; der Ausgleichungsprozefs unter den vorübergehenden Ursachen, der Normalzustand, der aufrecht erhalten wird, wenn nicht etwa Faktoren auftreten, die ebensowohl dauern, wie eben jene 6 Würfelseiten, kurz, was auch versucht wird uns durch Fiktionen und Hypothesen nahe zu führen, was uns im Grunde näher nicht sein kann, ist immer wieder jene gleiche Wahrscheinlichkeit, die in Gedanken über den Haufen geworfen wird, wenn wir eine andere Art des Geschehens für berechtigter hielten,

als eben diejenige, welche der Bernoullische Satz für die wahrscheinlichste erklärt. Auch das Recht auf die Fragestellung hat seine Grenzen; die Verwunderung, der Zweifel und die Kritik sind Polizei-Vorschriften, aber die Erfüllung der Gesetze schafft auch ihnen einmal Ruhe.

Dafs es einen Zufall nicht giebt — ob man hinzufügt: im eigentlichen Sinne, oder wie man sich einschränken will, ist gleichgültig —, sieht Jedermann ein, wenn damit gesagt sein soll, Kausalität und Wechselwirkung seien in ihm aufgehoben. Auch dafs er lediglich auf unserer Unwissenheit beruhe, ist kein ckarakteristisches Merkmal. Die Lehre von den vielen Kausalitätsreihen, die sich parallel laufen oder sich kreuzen, enthält Anschauungen, welche von der Kausalität im einzelnen gleichsam zu einer Kausalität en gros gelangen, ohne uns wesentlich klüger zu machen. Ich mufs gestehen, dafs mir immer ein gewisses Grauen angekommen ist, dem mehr Bedauern als Ehrfurcht beigemischt war, wenn die Fiktion des allumfassenden Verstandes in die Erscheinung trat, dem jede einzelne Veränderung in der Welt a priori klar, alles Vergangene und Zukünftige bis ins Unendliche bekannt und sicher sein müsse. Diese Fiktion ist ein menschlicher Gedanke, auf den man nur menschlich reagieren kann. Und nun stelle man sich einen Verstand vor, der die Buffonschen 4040 Versuche bis aufs Tüpfelchen vorhersieht, eine innerhalb unserer Betrachtungen, die mit ungeheueren Zahlen rechnet, bescheidene, aber doch im Grunde grausame Zumutung.

Mir will scheinen, dafs wir das Wort „Zufall“ nicht so sehr da gebrauchen, wo wir eine Erklärung nicht zu geben vermögen, als da, wo sie von gar keinem Interesse ist. Wir unternehmen eine Reise nach dem Nordkap, und siehe, als wir das Schiff besteigen wollen, tritt auch ein lieber Freund, den wir seit Jahren nicht gesehen haben, an Bord. Ein merkwürdiger Zufall. Er bleibt aufrecht, nachdem wir uns getreulich über die Vergangenheit und den Entschlufs zur Reise alles Wissenswerte erzählt haben. Was nun noch vom Zufall übrig bleibt, ist in unseren Beispielen der Wahrscheinlichkeitsrechnung immer vorausgesetzt: die Möglichkeit der Ereignisse selbst. Die Kugeln sind alle da, und sie können gezogen werden, eine wie die andere mit gleichem Recht. Eine Würfelseite kommt in einer grofsen Zahl von Würfen nahezu so oft daran als die andere; das giebt uns gar keinen Anlafs zur Frage. Eine Antwort interessiert uns gar nicht; das haben wir ja vorausgesehen.

Nun kommt es aber anders; die 6 überwiegt, und zwar in auffälliger Weise, sagen wir mit einer minimalen vorherigen Wahrscheinlichkeit, wie sie die binomische Entwicklung angezeigt haben würde. Wir prüfen den Würfel, er erweist sich tadellos. Was hat sich ereignet? Das a priori, d. h. nach allgemeinen Gesetzen Mögliche ist wirklich geworden.

Das ist ein wesentliches Kennzeichen des Zufalls, schlechthin unbestimmbar zu sein. Wir können ihm Grenzen setzen, aber wenn auch nur 2 Fälle das zu beurteilende Verhalten einschränken, so giebt es kein Denkgesetz und keine Erfahrung, aus der wir denkend irgend welche Gesetzlichkeit abzuleiten vermöchten. Aber daran zweifeln wir nicht, dafs alle Vorgänge, wie sie auch seien, mit Notwendigkeit eintreten. Der Zufall ist immer das Besondere, das Einzelne, das wir nur begrifflich in eine Reihe bestimmter Vorgänge einordnen, niemals aber in einem allgemeinen Satz der Fessel des eindeutig bestimmten Geschehens überantworten können. Wir können den Zufall herstellen und haben die Macht, die Natur, d. h. das Gesetz, in unsern Dienst zu zwingen. Unsere Willensakte ziehen wir in die Beurteilung nicht mit ein, aber nach dem, was wir können, dürfen wir nicht messen, was sich ebensowohl unserem Willen als auch unserer Kenntnis entzieht.

Das Einzelne, Thatsächliche, keinem Gesetz als dem Begriffe eines Geschehens Subsumierbare ruht auf tausend Bedingungen, die wir nicht kennen; es selbst hat aber für unser Wissen, das auf Allgemeinheit geht, keinerlei Interesse. Eben deshalb lassen wir den Zufall überall auf sich beruhen, wo es sich um wissenschaftliche Untersuchung handelt. Was uns hier interessiert, ist nicht der Zufall, sondern unser logisches Verhalten gegenüber einem Geschehen, dem wir selbst einschränkende, aber im grofsen und ganzen solche Bedingungen setzen, die eine freie, der gesetzlichen Form widerstrebende Entfaltung bewirken. Wenn also auch der seltsamste Zufall, den unsere Vorschriften noch zulassen, eintritt — und das ist gelegentlich der Fall —, so stand dem ja gar nichts entgegen, denn das noch so Wahrscheinliche ist darum nicht gewifs. Ist jener Würfel tadelfrei, so wäre noch eine zweite Frage von Interesse. Ist es möglich, dafs der Wurf mit einer gewissen Geschicklichkeit des Werfenden, von einer Absicht herbeigeführt worden ist? Sofern das wirklich ausgeschlossen ist — und es wäre auch bei normalen Würfeln möglich —, so bleibt nichts übrig, als die Thatsache hinzunehmen. Wie sie aber zu stande gekommen ist, das kann ein wissen-

schaftliches Interesse am wenigsten in allen unseren Beispielen haben, denen wesentlich ist, dafs in dem Geschehen selbst nichts liegt, das der wissenschaftlichen Analyse wirklich unzugänglich wäre. Die mechanischen Vorgänge sind völlig erklärt, und die Prozesse, welche sich bei willkürlichen menschlichen Bewegungen abspielen, wird man von dieser Seite her nicht untersuchen wollen. Unsere Aufgabe ist in jeder Disziplin, das Allgemeine im Besonderen aufzusuchen; die Methoden sind überall das Mittel zum Zweck, und ihnen ist wesentlich, dafs wir eine bestimmte Frage von allem Beiwerk frei machen, das uns in der Betrachtung stört. Das Eintreffen solcher Fälle, welche a priori eine minimale Wahrscheinlichkeit haben, gehört zu den Kuriositäten, die man, wenn das Bedürfnis hinreichend grofs ist, aufschreiben mag. Man wird ihrer im Leben und in der Geschichte soviel haben, dafs die Schreiblust bald vergehen würde.

Auch das hat man zu berücksichtigen, und es wird zuweilen übersehen, dafs die Verwunderung über ein Ereignis und unser Mifstrauen dann erst gerechtfertigt ist, wenn eine Vorhersage oder ein Interesse, Gewinn oder Verlust, an dasselbe geknüpft war. Der berühmte Abbé GALIANI, der durch alle Abhandlungen der Disziplin hindurch „Sangue di Bacco" schwört oder flucht, weil ein ebenso naiver als gaunerhafter Neapolitaner mit gefälschten 3 Würfeln $3 \times 6$ warf, auf die er gehalten hatte, würde sich mit seinem Ruhme auf die Angaben philosophischer und nationalökonomischer Geschichtswerke beschränkt sehen, wenn 5 mal nacheinander $3 \times 5$ gefallen wäre.

Beim BERNOULLIschen Satze kümmert uns auch nicht der interessante Zufall der Ausnahmen von der Regel, sondern der ganz banale, selbstverständliche Zufall, der weder zu einer Hypothese noch zu weiterem Nachdenken den geringsten Anlafs bietet. Es wäre absurd, wenn dem, was mit gröfster Wahrscheinlichkeit vorher bestimmt wird, in der Wirklichkeit nichts entsprechen sollte. Die physikalische Erklärung ist vorausgesetzt, und man mufs nur nicht meinen, dafs man im Gebiete der Physik sich bewegte. Das berühmte Theorem giebt keinen Beweis eines Gesetzes der grofsen Zahlen, sondern es setzt nur den Gedankengang des alltäglichen Verstandes in eine arithmetische Formel um.

Mit der unvollziehbaren Voraussetzung unendlich vieler Fälle wollen wir nicht rechten; sie hat ja eine lediglich kalkulatorische Bedeutung, die den nicht stört, der mathematische Grenzbetrachtungen ihrem Sinne nach zu beurteilen imstande ist. Nur eins darf

man nicht denken: dafs man sich mit den Zahlen wirklich in die absolute Gewifsheit hinein rechnen könnte. Für Bernoulli allerdings war die Rechnung der Asymptote vergleichbar, die sich der Kurve des wirklichen Geschehens im Sinne der Wahrscheinlichkeitsverhältnisse immer mehr nähert, während doch eben der Spielraum, der durch die Voraussetzungen dem Geschehen belassen wird, die Abweichungen zuläfst, die Schritt für Schritt auch in der Rechnung als möglich erwogen werden. Diese Rechnung, wie es Bernoulli that, mit dem Vorgange zu vergleichen, der bei der Ermittlung der Ludolphschen Zahl $\pi$, dem Verhältnis des Kreisdurchmessers zur Peripherie, uns mit jeder Dezimale dem wahren Werte näher führt, ist arithmetisch richtig, mit einem kleinen, aber bedeutungsvollen Unterschied, der in der Sache ruht. Die Zahl $\pi$ ist überhaupt nicht angebbar, indessen komme ich ihr mit jeder Ziffer näher, jeder neue Zug in die Urne und jede Reihe von Zügen hat aber nicht die Bedeutung, welche etwa der Verdoppelung der Seitenzahl des regulären Polygons, mit dem man dem Kreise näher kommt, zu vergleichen wäre. Das Verhältnis der günstigen zu allen möglichen Fällen wird a priori immer gröfser und kommt immer mehr an die Einheit; breche ich aber die Versuche an verschiedenen Stellen ab, so bin ich gar nicht sicher, ob ich nicht vorher dem normalen Verhältnis näher war, als später, eine Thatsache, auf die zuerst Leibniz aufmerksam gemacht hat, und die in neuerer Zeit von Lotze näher beleuchtet worden ist.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Mafs unserer Erwartung, aber nicht die Erwartung wird gemessen, sondern jene ist ein Mafs, nach dem sich die Erwartung richtet oder richten könnte. Wir erwarten ein Ereignis mit gröfserer oder geringerer Zuversicht, und es ist eine psychologische Thatsache, dafs wir bei hoher Wahrscheinlichkeit des Erfolgs sicher zu sein glauben. Die ganze Disziplin verlangt den Standpunkt, auf welchem noch verschiedene Möglichkeiten gedacht werden, gleichviel, ob es sich um Vergangenes oder Zukünftiges handelt. Es giebt einen grofsen Raum innerhalb der Grenzen *0* und *1*, für den wir unsere Erwartung völlig aussetzen; das stört nicht den Begriff der Rechnung als einer Direktive für unser Urteil. Wette und Spiel mit seinen Erwartungen, als psychologischer Erscheinung, kann man völlig bei den begrifflichen Fragen aufser acht lassen. Eben diesen Erwartungen rückt der Rechenmechanismus der Wahrscheinlichkeit wenn auch vergeblich zu Leibe. Natürlich meinen wir nicht den harmlosen Zeitvertreib beim Whist

oder Piket. Das „Mafs für unsere vernünftige Erwartung“ schränkt den psychologischen Begriff etwas ein: es bedeutet eine Abstraktion, der im Grunde nichts entspricht. Die Geltung für den einzelnen Fall in der Erwartung kann man verneinen und bejahen; es läfst sich darüber allgemein gar nichts sagen. Wann erwarten wir ein Ereignis, wann nicht? Ist hier die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ wirklich die Grenze? Oder liegt sie bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$? Wer kann das sagen? Das wird nicht allein individuell von Person zu Person, sondern auch von Fall zu Fall verschieden sein, selbst wenn wir annehmen, dafs die Erwartung lediglich von dem Quotienten und nichts anderem sich dirigieren läfst. Die parallele Frage ist doch für den Verstand: Wann halten wir eine Aussage, deren Notwendigkeit nicht auf der Hand liegt, die also nur wahrscheinlich ist, für richtig und wann nicht? Auch hier wird das Psychologe mitzureden haben. Wie dem auch sei, so wird die praktische Bedeutung der Quotienten wesentlich darin liegen, wie sie sich in ihrem Einflufs auf unser Urteil geltend machen können.

Insofern Jemand in der Wissenschaft die Maxime befolgt, nur das Gewisse anzuerkennen, können wir ihn durch keine Argumentation zwingen, sich auf Wahrscheinlichkeiten einzulassen. Will er sich mit uns einigen, so wird er mit der Bestimmung $^{5}/_{6}$ auch den Bernoullischen Satz in den Kauf nehmen müssen. Der hohe Grad von Wahrscheinlichkeit, den er, wenn auch nach noch so künstlicher Ableitung, mit seiner Aussage verbindet, statuiert allerdings nur einen Gradunterschied, aber es wäre sinnlos, wenn wir an eine hohe Wahrscheinlichkeit nicht die Vorausbestimmung zukünftiger Ereignisse im Sinne der Aussage knüpfen sollten. Diesem Gradunterschiede in der Definition Rechnung zu tragen, liegt ein Anlafs nicht vor, obwohl viel Mifsverstand damit hätte beseitigt werden können.

Wer die Definition als ein Resultat der Übereinkunft ansieht, der wird nicht ohne weiteres sagen, dafs John Stuart Mill unrecht hatte, die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch die erfahrungsmäfsig festgestellte Frequenz in einer grofsen Zahl von Fällen zu definieren. Mill hat diese Definition später aufgegeben, weil er sich davon überzeugte, dafs die Mathematiker in der historisch gegebenen Entwicklung der Disziplin die Wahrscheinlichkeit nicht als eine Eigenschaft des Ereignisses selbst auffassen, sondern weil sie „ein blofser Name für die Stärke des Grundes ist, wonach wir oder andere dasselbe erwarten“. Die Mathematiker haben sehr recht gethan, ihre Definition an die fest

gegebenen und zufolge der explicite oder implicite gemachten Voraussetzungen bestimmenden Disjunktionen anzuknüpfen, anstatt von dem „wahrscheinlichsten Falle" ausgehend den Mafsstab des Wahrscheinlichen zu fixieren. Beide Begriffe, die mathematische Wahrscheinlichkeit des Einzelfalls und die wahrscheinlichste Verteilung, hängen zwar so fest aneinander, dafs der eine den andern mit sich bringt, indessen ist es doch zweckmäfsiger, den allgemeineren, umfassenderen Standpunkt einzunehmen, namentlich wenn er auch der unmittelbar erreichbare ist. Aber auch wenn ich mit höchster Wahrscheinlichkeit eine gewisse Verteilung von Ereignissen $E$ und $E_1$ erwarte, für die jede Reihenfolge gleichwahrscheinlich ist, hätte ich dies Verhältnis als mathematische Wahrscheinlichkeit definieren können, unbekümmert um die Konsequenz aus der historischen Definition, nach welcher auch aus der wahrscheinlichsten Verteilung wiederum die Wahrscheinlichkeit des einfachen Ereignisses nur als wahrscheinlich folgt.

Noch mehr, der Fall, welcher hier unberücksichtigt bleiben würde, in welchem nämlich jene Verteilung sicher ist, hat in Wirklichkeit nur Bedeutung für die Theorie und praktisch für die Spiele; gleichwohl ist der Unterbau der a priorischen, aus den vorauszusetzenden Bedingungen und nicht dem Geschehen selbst hergeleiteten Wahrscheinlichkeit ein so festes Gefüge, weil die Bausteine, selbst aus dem Steinbruche des Verstandes stammend, glatt und unbehauen sich der zweckmäfsigen Fundamentierung erbieten.

Leider kann ich die Bemerkung Stumpfs nach seinem Hinweis nicht kontrolieren, laut welcher Stuart Mill „nicht ganz und konsequent" seinen gekennzeichneten früheren Standpunkt aufgegeben habe. Die Gomperzsche Übersetzung war mir leider nicht zugänglich. Wenn Stumpf, wie ich vermute, an dieser Stelle Anstofs nahm:

> „Beim Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit von eins $\frac{1}{6}$; nicht blofs, weil es sechs mögliche Würfe giebt, unter denen eins einer ist, und weil wir keinen Grund kennen, warum der eine Wurf eher fallen sollte, als der andere, obgleich ich die Gültigkeit dieses Grundes in Ermangelung eines andern zugegeben habe: sondern weil wir wirklich entweder durch Schliefsen oder durch Erfahrung wissen, dafs in einem Hundert oder in Millionen von Würfeln eins ungefähr ein sechstelmal von dieser Zahl oder einmal in sechs Malen fällt" (S. 74),

so ist das in Verbindung mit der unmittelbar folgenden Stelle eine

Konzession des Empiristen, in der er mit der scharfen Kritik der beiden Gelehrten FRIES und COURNOT sich völlig berührt, denen man einen empiristischen Standpunkt nicht zum Vorwurfe machen wird. MILL giebt es auf, die Wahrscheinlichkeitsbestimmung von einer vorangegangenen Abzählung abhängig zu machen, wie er es zuvor gethan hatte. Die Lehre von FRIES und COURNOT, die nach ELSAS den in Königsberg gesponnenen Faden der Erkenntniskritik gleichzeitig an seinen beiden Enden festhalten, läfst sich in die Mahnung zusammenfassen: Wer den Wahrscheinlichkeitsquotienten ansetzt, der sehe sich vor, dafs auch das BERNOULLIsche Gesetz der grofsen Zahlen, der Ausdruck des gesunden Verstandes, zu seinem Recht gelangen kann.

Im einzelnen braucht man nicht alles hinzunehmen, was jene beiden uns bieten; darin haben sie aber mit STUART MILL unzweifelhaft recht, das Segel an mehreren Stellen zu befestigen. Die Theorie, welche sich mit Denkmöglichkeiten begnügt, hat freilich weder Segel noch Schifflein nötig; sie entfaltet ihr Banner und läfst es im Winde spielen.

Das BERNOULLIsche Theorem kann aufgefafst werden als eine Konsequenz unserer Festsetzungen, und wenn es sich nun bis auf die exakte Behandlung im gemeinen Verstande vorfindet, so ist das eine Bestätigung dafür, dafs unsere Annahmen und Dekreturen nicht zu falschen Folgerungen innerhalb unseres Schlufsverfahrens geführt haben. Den Inhalt des Satzes, soweit er ohne weiteres einleuchtet, zum Ausgangspunkt der Definition des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs zu machen, widerspricht zwar dem historischen Gang der Disziplin, ist auch wohl unzweckmäfsig, aber wer diesen Weg gehen wollte, müfste von dem Vorwurf der Verkehrtheit freigesprochen werden. Der numerischen Wahrscheinlichkeit des Einzelfalls entspricht im Geschehen nichts, aber die Gewifsheit der realen Möglichkeit aller Fälle garantiert die Verwirklichung eines einzigen; der Quotient figuriert in unserem Urteil, in dem wir ihn als Prädikat aussagen; welche Erwartung wir aber an dies Urteil knüpfen, läfst sich nur individuell bestimmen. Man kann mit diesem Quotienten eine Wette auf billige Weise regulieren, aber eben die Möglichkeit der Wetten beweist, dafs verschiedene Menschen auch bei verschiedener Wahrscheinlichkeit zweier entgegengesetzten Ereignisse die Erwartung hegen zu gewinnen. Gleichviel, wie der Einsatz abgestuft wird, wer spielt oder wettet, der erwartet auch den Fall, an den sich der

Gewinn knüpft. Die Erwartung ist ein komplizierter Zustand im Bewufstsein, von dem unser praktisches Verhalten ebenso wie unser Urteil in der mannigfaltigsten Weise beeinflufst sein kann. Man thut gut, sich auf das Gebiet der relativ einfacheren Prozesse im Denken zu beschränken. Spricht man von einer „vernünftigen Erwartung“, so spielt man den Begriff von dem psychologischen Gebiet in die Sphäre des Verstandes hinüber. Wer etwas vernünftigerweise erwartet, der hat ein Urteil gebildet, an das sich die Überzeugung knüpft, dafs demselben ein Verhalten sich adäquat erweisen werde. Diese Prävalenz des Verstandes in der Erwartung zu fördern, ist eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht allein, sondern der wissenschaftlichen Methoden überhaupt. Wer etwas erwartet, das mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ verbunden ist, weifs, dafs von sechs möglichen Fällen nur einer gegen ihn ist. Er ist gegenüber dem andern Spieler, der auf den andern Fall gehalten hat, im Vorteil, aber nicht seine Erwartung wird durch den Bruch $\frac{5}{6}$ gemessen, sondern die Chancen und unbekümmert um unsern gewöhnlichen Sprachgebrauch, der das Wirken in die Ursache selbst hineinlegen möchte, weil von den sechs abzählbaren Ursachen fünf für ihn sind. Oder ist der zu Boden fallende Stein, der eine Scherbe zertrümmert, die Kugel, welche den Tod bringt, die Lokomotive, welche den Train fortbewegt, sind alle die Objekte, welche an einem Geschehen insoweit beteiligt sind, als dies ohne sie überhaupt nicht möglich wäre, nicht in die kausale Auffassung mit einzubeziehen?

In diesen realen, in der Kausalität wurzelnden Grundlagen liegt die objektive Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, aber eben weil diese Grundlagen ein verschiedenes Geschehen offen lassen, kommt aus der Benennung „der Stärke des Grundes“ mit einem Quotienten noch kein Mafs heraus, nach dem wir einen einzelnen Fall „vernünftigerweise“ erwarten dürfen oder nicht. Das erstere dürfen wir nur, wenn wir ein sicheres, eindeutiges Verhalten bestimmt haben, und auch dann ist uns das Nächstfolgende im Verlaufe der Welt nicht, sondern nur formal in unserem richtigen Gedankengange gewährleistet. Jene Benennung wäre mit all ihren objektiven Daten völlig leer, wenn wir nicht, und das ganz unabhängig von unseren Benennungen, Definitionen und Rechnungen, von vornherein eben auf Grund der Daten die Überzeugung hätten, dafs z. B. beim Würfel die sechs Chancen sich etwa in gleicher Verteilung Geltung verschaffen werden, um keine Mifsdeutung her-

vorzurufen, wenn wir nicht die Überzeugung hätten, dafs der populäre Inhalt des Bernoullischen Satzes auch für das wirkliche Geschehen Geltung hätte. Diese Geltung mag auch nur darin bestehen, dafs uns das Wahrscheinlichste eben darum auch das Begreiflichste ist. Die Einzelvorgänge, und das ist jeder Wahrscheinlichkeit a priori eigen, dürfen nichts potentialiter Unerklärliches enthalten. Die Kräfte, die innerhalb des Spielraumes, den wir dem Geschehen belassen, sich entfalten, müssen mindestens ihrer Wirkungsweise nach sicher bekannt sein. „Keine Wahrscheinlichkeitsangabe, auch die Bernoullis nicht, will sagen, was geschehen wird“ [1]), aber der Inhalt des Bernoullischen Satzes will doch für den Fall, dafs etwas an sich nach verschiedenen Richtungen Unbestimmtes wirklich eintritt, voraussagen, wie es ungefähr geschehen wird. Fries und Cournot haben dem Gesetze der grofsen Zahlen „objektive“ Bedeutung und seinen Aussagen die Qualität der Vorausbestimmungen von Durchschnittszahlen zugesprochen; man mag nun über die Terminologie mit ihnen anderer Meinung sein, so hätte Stumpf jene citierten Worte gegenüber dem „einzigen deutschen Philosophen, der in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts der Wahrscheinlichkeitsrechnung eingehendere“ — und wir meinen sehr wertvolle, wenn auch leider tiefere Spuren nicht zurücklassende — „Beachtung schenkte“, wohl vermeiden können. Dafs Fries weit entfernt war, irgend welche Prophezeiungen für möglich und beabsichtigt zu halten, beweist sein Buch, und was man ihm entgegenhält, gemahnt an eine Bemerkung Lichtenbergs in Sachen D'Alemberts:

> „Freilich dem Herrn D'Alembert solche Gründe entgegenzusetzen, kommt mir nicht viel besser vor, als einem gelehrten Verteidiger der Dreieinigkeit die Beweise der Multiplikation entgegenzusetzen.“

Wir möchten die Definition des Begriffes nicht an das Gesetz der grofsen Zahlen anknüpfen, wir glauben auch nicht, dafs man Erklärungsversuche für das Zufallsspiel und seine Resultate einschliefslich der Versuche von Buffon, Wolff und Jevons nötig hat, indessen scheint es uns geboten, für den Gebrauch der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Sinne von Fries und Cournot als experimentum crucis zu empfehlen: Man prüfe immer erst, ob die Bestimmung angesichts des Bernoullischen Satzes noch einen Sinn behält oder nicht.

---

[1]) Stumpf a. a. O. S. 115.

## Die logische Theorie und das Gesetz der grofsen Zahlen.

Die Bezeichnung des Bernoullischen Satzes als eines Gesetzes ist vielfach angefochten worden. Nicht mit Unrecht, denn im Gebiete des Wahrscheinlichen kann es nur Vorschriften geben, sagen wir von regulativer Bedeutung. Wer sich ihnen nicht fügen will, der läfst es eben bleiben. Dafs man nicht in die Zukunft schauen kann, ist glücklicherweise richtig, wenn auch nicht allgemein anerkannt. Aber der abstrakte Mensch, der immer nur handeln wollte, wenn er des Erfolgs sicher wäre, der müfste wirklich nicht, wie der Buridansche Esel, der nach Windelband nur in der Metaphysik verhungert, des Todes sterben, sondern als ein Schema des reinen Verstandes den Lehrbüchern der Logik als Titelkupfer beigegeben werden. Er würde nicht sterben, weil er nicht gelebt hat, so wenig wie der „mittlere Mensch", den wir den Festsetzungen der Statistik glauben sollen. Im Getriebe der Wirklichkeit gilt der Satz des Bernoulli, aber nicht, weil er ihn bewiesen hat, und auch mit dem Beweis wird er uns nicht einmal um ein Haar durchsichtiger, als es sein Inhalt ohnedies ist. Bertrand fafst sich sehr kurz:

> „S'il pleut un jour entier sur la place du Carrousel, tous les pavés seront également mouillés. Sous une forme simplifiée mais sans en rien retrancher, c'est le théorème de Bernoulli."

Wie kann eine solche Binsenwahrheit Anspruch auf den strengen Titel eines Gesetzes erheben?

Wir glauben gezeigt zu haben, dafs in dem künstlichen mathematischen Aufbau die Gedanken des Alltags sich verknüpft finden, aber alle seine in Formeln gefafsten Sätze sind ebensoviele Gesetze, wie die einfache Relation

$$(a + b)(a + b) = aa + 2ab + bb$$

ein solches darstellt. Nur der Sinn der Rechnung, die Interpretation und der Einflufs, den wir ihr für die Beurteilung zugestehen, lassen es berechtigt erscheinen, die Bezeichnung „Gesetz" als eine lediglich historische hinzunehmen, wie wir etwa von latenter Wärme sprechen und auch sonst wohl veraltete Bezeichnungen weiter führen. Die Objektivität seines Inhalts liegt in dem, was wir notwendig denken müssen, die Kongruenz mit den Maximen des gesunden Menschenverstandes in der zweckmäfsigen Wahl eines Mafsstabs, der leistet, was man von ihm erwartet hatte. Der Satz ist eine Regel, die doch wohl nicht aus dem Gebiete der Objek-

tivität heraustritt, weil sie ihrem Wesen gemäfs Ausnahmen zuläfst, und zwar Ausnahmen, die bei Erfüllung der objektiven Voraussetzungen im praktischen Gebrauch ebenso selten sind, wie die oft grausamen Kuriositäten in der Natur.

Jener Satz von Bernoulli zählt in der komplizierten Weise, die der Gegenstand verlangt, Möglichkeiten. Den Fällen, welchen eine relativ hohe Zahl zukommt, sprechen wir auch eine gröfsere Frequenz zu, wenn wir ihnen zur Konkurrenz mit allen anderen verhelfen. Das schien uns der Grundgedanke der Disziplin, die ein Geschehen voraussetzt, für das uns ausschliefslich eine gewisse zahlenmäfsige Bestimmbarkeit und aufserdem gegeben ist, dafs die Vorgänge völlig gleichartig sind, so dafs die begriffliche Abstraktion nur vor den individuell verschiedenen, nach unserer Vorschrift charakterisierten Thatsachen Halt macht. Es ist uns gleichgültig, welche schwarze Kugel zum Vorschein kommt, oder wir numerieren und verlangen eine fest bestimmte; wir fragen nach einer Reihenfolge oder sehen nur auf das Verhältnis der Einzelereignisse, wir geben auch diese Anforderung auf und lassen nur einen Spielraum, der jenes Verhältnis in gewisse Grenzen bannt. Kein Wunder, dafs in dem Mafse, in dem wir unsere Anforderungen herabsetzen, auch die Wahrscheinlichkeit zunimmt, dafs sie auch erfüllt werden. Alle diese Veränderungen der Aufgabe haben ihre Analoga in rein logischen Operationen und erinnern an die Beziehungen, welche die Umfangsverhältnisse der Begriffe regeln. Nur genügten uns die rein logischen Verhältnisse nicht, weil wir nicht mit den Einheiten, die unsere Abstraktion in voller Freiheit schaffen kann, etwas berechnen konnten, das nicht wieder Einheiten derselben Art in sich vereinigt hätte. Wir verlangten quantitative Bestimmungen von oder an Objekten, die sich mathematisch und physikalisch bis auf die für das Geschehen festgesetzten, für dieses unwesentlichen Merkmale vertreten können. Und von den Operationen selbst verlangen wir jene Indifferenz, die wiederum der begrifflichen Fixierung keinen Anlafs giebt, Unterschiede zu machen. Vom Würfelspiel läfst sich alles abstrahieren, was verlangt wird, während die Kugelbeispiele für alle möglichen Modifikationen in den Aufgaben sich besonders geeignet zeigen; aber sie verlangen bestimmte, zahlengemäfs deutbare Voraussetzungen.

Wir geben vollständig zu, dafs eine Übereinkunft auf anderen Grundlagen möglich ist; nur dafs sie die historisch vorliegende wäre, stellen wir in Abrede. Wir haben nicht zu fragen, was man mit

einer andern etwa anfangen könnte, sondern wie sie sich zu dem Begriffe verhält, den sie dem alltäglichen Leben entnimmt, und dessen von Niemand bestrittene Fähigkeit, graduiert zu werden, sie veranlafst, ein Mafssystem aufzustellen.

Gegen SIGWART[1]) bestreiten wir, dafs mit dem disjunktiven Urteil, auf das unsere Kenntnis eingeschränkt ist, die „Schätzung der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Möglichkeiten" beginnt, eben weil wir seine Worte:

> „Führt die Entwicklung einer bestimmenden Frage nur zur Aufstellung eines disjunktiven Urteils, ohne dafs die Möglichkeit vorläge, aus diesem zu einer Entscheidung zu gelangen, so bleibt die Untersuchung zunächst vor einer Frage stehen, die unlösbar ist; die eigentliche Deduktion hat ein Ende, und das Denken kann nur die verschiedenen Möglichkeiten übersehen, ungewifs, welche derselben gilt"

in Verbindung mit den vorhergehenden

> „Schlüsse aber auf die relative Häufigkeit des wirklichen Eintretens der einzelnen Möglichkeiten nach dem Mafse ihrer Wahrscheinlichkeit sind nur dann zulässig, wenn sie sich auf bestimmte Voraussetzungen über die Bedingungen dieses Eintretens stützen können —"

vollständig anzunehmen uns gezwungen finden.

Wir sind in einer auch zahlengemäfs nicht zu behebenden Ungewifsheit und verbleiben in derselben, wenn wir nur die Disjunktion haben. Diese Disjunktion, so behaupten wir, giebt uns keinen gröfseren Anhalt zur „Schätzung der Wahrscheinlichkeit", ob sie zwei Glieder oder deren eine Million enthält, wenn wir nicht die Möglichkeit haben, einen Schlufs auf die relative Häufigkeit der Fälle zu ziehen. Es ist schwieriger, unter einer Million von Möglichkeiten das Richtige zu e r r a t e n, als unter zwei disjunkten Fällen den zutreffenden auf gut Glück zu bezeichnen; das geben wir zu. Aber wer sagt uns, dafs jene zwei Glieder nicht eine Million der einen Art und nur einen einzigen Fall der andern repräsentieren? Jene Ungewifsheit wird durch quantitative Bestimmungen der Prädikate nicht beseitigt, aber sofern diesen ein Einflufs auf das, was geschieht, zugesprochen werden kann, beginnt die Möglichkeit nicht einer „Schätzung der Wahrscheinlichkeit", sondern einer Beurteilung nach zahlenmäfsigen Gründen, denen

[1]) Logik II S. 270.

ebensoviel Chancen für und wider das Ereignis entsprechen, als in der Disjunktion angegeben werden.

Wir schätzen nicht die Wahrscheinlichkeit, sondern diese Wahrscheinlichkeit ist die Schätzung selbst. Erst wenn wir die Wahrscheinlichkeit als etwas logisch völlig Bestimmtes definiert haben, könnte von einer Schätzung derselben die Rede sein, sofern in den Daten ein weiterer Mangel liegt, der auch eine exakte Wahrscheinlichkeitsaussage verhindert.

Dafs beim disjunktiven Urteil „die Zahl der Disjunktionsglieder eine entscheidende Rolle spielt", kann allerdings die Möglichkeit der mathematischen Behandlung nahelegen. Aber, wird man fragen, welche Rolle spielt denn diese Zahl der Disjunktionsglieder überhaupt? Unser Nichtwissen hat einen andern Charakter, je nachdem wir über 2, 3, 4 Möglichkeiten im Ungewissen sind, erfahren wir bei Sigwart.

Rolle und Charakter sind sehr allgemeine Bezeichnungen; sie werden erläutert durch die Definition: „Sicherheit, mit der wir die Wahrheit einer bestimmten (Möglichkeit) erwarten dürfen", auf welche eben die Zahl der Disjunktionsglieder von Einflufs ist. Die sich anschliefsende Definition jener „Sicherheit", d. i. der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$, dafs unter der Voraussetzung $A$ das Prädikat $B_1$ eintrete, erläutert nun, dafs dieser letztere Ausdruck nichts anderes besagt, „als dafs ein disjunktives Urteil mit $n$ Disjunktionsgliedern besteht, deren eines $B_1$ ist, von der Form:

Wenn $A$ ist, ist entweder $B_1$ oder $B_2$ oder $\cdots\cdot B_n$."

Die Voraussetzung, dafs kein Grund vorliegen dürfe, welcher uns das eine mehr als das andere erwarten läfst, haben wir an anderer Stelle als eine unmögliche zurückgewiesen. Wo nur eine logische Disjunktion vorhanden ist, liegt immer ein kritischer Grund vor, die gleiche Berechtigung der Prädikate $B_1$, $B_2 \cdots\cdots B_n$ zu bezweifeln.

Was zur Anerkennung dieser Definition verleiten kann, ist folgendes. Es ist eine lediglich psychologische Thatsache, dafs uns die Wahl schwerer wird, wenn die Zahl der gleichen Objekte, die zur Auswahl stehen, steigt. Wird sie hinwiederum sehr grofs, so wird uns das Aussuchen gleichgültig, da die Möglichkeit der besten Wahl mit offenen Augen gegenüber ununterscheidbaren Objekten immer weniger wahrscheinlich wird, und wir greifen wohl blindlings zu und das selbst dann, wenn von der Wahl Wichtiges abhängt.

Diesem psychologischen Verhalten liegt nicht sowohl ein logisches Argument zugrunde als vielmehr die Erwartung, es könne immer noch ein Moment für uns erkennbar werden, das die Bevorzugung dieses Gegenstandes, oder was es auch sei, vor allen anderen uns annehmbar machte, eine Hoffnung, die wir mit wachsender Zahl aus leicht ersichtlichen Motiven ganz aufgeben. Wissenschaftlich hat nun die Wahl unter verschiedenen Möglichkeiten, von denen eine zutrifft, die anderen aber mit ihr gleich gewifs und gleich ungewifs erscheinen, ganz und gar keine Bedeutung. Praktisch ist sie die Domäne der Wette und des Spiels, aber auch hier erleidet die zufällige Wahl noch mannigfache Ablenkungen, während im Leben der Wille und die Entscheidung des Urteils „einer bis ins Unendliche empfindlichen Wage zu vergleichen ist, die, auch sehr stark auf beiden Seiten beschwert, noch auf den kleinsten Gewichtszusatz einen Ausschlag giebt" (Windelband, Die Lehre vom Zufall. S. 9).

Wenn nun eine Disjunktion wie die obige vorliegt, so ist es richtig, zu sagen: es ist $\frac{1}{n}$ wahrscheinlich, dafs irgend ein Mensch das zutreffende Prädikat e r r ä t; der Zufall liegt hier im Erraten, im sich selbst beurteilenden Subjekt, dem ja völlige Freiheit gewährleistet ist. Jede Möglichkeit, die man mit einschliefst, macht es in der That minder wahrscheinlich, dafs man das Richtige trifft, und der, wir vermögen nicht mehr zu sagen urteilende, sondern der hasardierende Verstand wird zur Urne, aus der richtige und unrichtige formale Sätze gezogen werden können. Es bedarf keines Hinweises, dafs die Theorie der Zeugenaussagen und richterlichen Urteile sich zuerst dieser „objektiven Voraussetzung" eines konkaven Verstandes bedient hat. Das Prinzip der Spielräume ist bei dieser Auffassung vollkommen gewahrt, wenn wir auch behaupten möchten, dafs es seinem Urheber, da er die Messung psychischer Gröfsen leugnet, dadurch verleidet werden könnte.

Ob Sigwart unsere Deutung gutheifsen wird, wissen wir nicht, wie wir auch nicht zu beurteilen vermögen, ob wir angesichts des Urnenbeispiels mit unbekannter Mischung schwarzer und weifser Kugeln seine Worte:

> „Jede gezogene Kugel ist e n t w e d e r w e i f s o d e r s c h w a r z, und die Wahrscheinlichkeit, eine weifse zu ziehen, ist $\frac{1}{2}$"

für unsere Ansicht in Anspruch nehmen dürfen. Denn unsere Interpretation gilt in der That nur für den Fall, dafs ein einziges Mal geraten wird. Dann wird auch nach einmaliger Probe das dis-

junktive Urteil belanglos und giebt zu weiteren Erörterungen nicht den geringsten Anlafs. Es sagt ja weiter nichts aus, als dafs ein $A$ entweder ein $B_1$ oder $B_2 \cdots$ oder $B_n$ ist, und wenn wir darüber im klaren sind, so fällt es zusammen. Wir haben nach seiner Form und der Sache, die zu beurteilen ist, in der That den Fall der Anwendung auf eine einzelne Thatsache, und vielleicht sind die Anschauungen von FRIES und COURNOT, dafs hier nur eine subjektive Bedeutung vorliege, von keinerlei objektivem Wert die Rede sein könne, doch nicht so ganz unbegründet gewesen. Wir würden in SIGWARTS Beispiel nicht sagen, die Wahrscheinlichkeit, eine weifse Kugel zu ziehen, sei $\frac{1}{2}$, denn diese hängt davon ab, was von den Kugeln vorausgesetzt werden konnte, sondern die Wahrscheinlichkeit, den nächsten Zug zu erraten, ist $\frac{1}{2}$, und würden noch als dritte Aufgabe für möglich halten, die Wahrscheinlichkeit dafür anzugeben, dafs richtig geraten wird, eine zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit, für welche wiederum Voraussetzungen über die Kugeln notwendig sind. Diese subtilen und fast pedantischen Unterschiede entsprechen thatsächlich der ganzen Feinheit des Instruments, das auf die geringsten Abweichungen zu reagieren imstande ist. Bei der Unterscheidung der Wahrscheinlichkeit, einen Fall zu erraten, von der andern, dafs er sich ereigne, ist dem disjunktiven Urteil sein volles Recht widerfahren. Es sagt nur aus, dafs ein Fall zutrifft; dafs die anderen auch nur möglich sind, liegt nicht in seiner Setzung, wenn ich nicht hypothetisch oder thatsächlich einen Sachverhalt zu Grunde lege. Die gleiche Wahrscheinlichkeit seiner Prädikate kann nur auf zahlenmäfsiger Grundlage behauptet werden. Und in der That substituieren wir die Disjunktion: „Wenn $A$ rät, so kann er nur richtig oder falsch raten", und dabei ist festzuhalten, dafs auch der Gegenstand der Aussage immer derselbe bleiben mufs, wenn der BERNOULLIsche Satz in Anwendung kommen soll. Es wäre wunderbar, wenn eine grofse Anzahl von Personen schwarz oder weifs raten soll, und nicht nahezu die eine Hälfte für das eine zu zählen wäre. Man sieht, dafs man bei konsequenter Fragestellung weder zu unzuträglichen Resultaten geführt wird, noch dafs auf die Anwendung der allgemeinen Methoden auch in einem einzigen Falle verzichtet zu werden braucht. Für den einzelnen Fall sagt der Wahrscheinlichkeitsquotient nichts, was nicht objektiv festgestellt werden kann, und dafs irgend Jemand ja oder nein, schwarz oder weifs sagen kann und wird, war vorausgesetzt. Wie er sich entscheidet, steht in seinem Belieben und ist belanglos

für irgend ein Geschehen, aber von Bedeutung für die Aufgabe. Braucht man nun zu jenem Urteil, dafs von einer grofsen Zahl von Personen sehr wahrscheinlich die eine Hälfte ja sagt, ein Prinzip der Spielräume? v. KRIES betont wiederholt dessen subjektiven Charakter, und es hat auch wohl keinen grofsen Wert, um Worte zu streiten. Zu unterdrücken ist aber die Frage nicht: „Was ist ein Prinzip von subjektivem Charakter?" Ist das ein Prinzip, das nur für den Einzelnen gilt? Dann könnten wir ihm auch die Bedeutung einer allgemeinen Polizeimafsregel nicht zusprechen. In der That ist es nichts anderes als eine Umschreibung, wenn nicht eine Spezialisierung der allgemeinen Anforderungen, die von der Disziplin nach ihren Definitionen seit jeher gestellt, wenn auch nicht immer innegehalten worden sind. Und diese Anforderungen sind durchaus objektiver Natur, wie alle Urteile, die wir innerhalb der Disziplin fällen. Was der gesunde Menschenverstand mit Jedermann plausibler Begründung zu erwarten berechtigt ist, sollte man nicht subjektiv nennen, es sei denn, dafs der Verstand selbst etwas Subjektives genannt werden müfste. Auch SIGWART betont den „lediglich subjektiven Charakter der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". „Sie mifst nichts als den Grad der Erwartung, den ich auf G r u n d e i n e s d i s j u n k t i v e n Urteils haben kann, das die Zahl der sich ausschliefsenden Möglichkeiten angiebt, die für den Stand meiner Kenntnis vorhanden ist, das sich aber sofort ändern kann, sobald meine Kenntnis eine genauere wird."

Ist ein richtig gebildetes disjunktives Urteil subjektiv oder objektiv? Eben dieses disjunktive Urteil ist doch wohl die Grundlage nach seiner Theorie. Und dafs sich das Wahrscheinlichkeitsurteil ändert, wenn sich meine Kenntnis ändert, ist keine seiner Besonderheiten, sondern gilt von jedem Urteil, sofern es nicht etwas ausspricht, dessen kontradiktorisches Gegenteil unmöglich ist. Wenn Jemand eine geladene Schufswaffe abdrückt, war dann sein Urteil, welches den gewöhnlichen Erfolg aussagte, subjektiv oder objektiv? Ändert an dem objektiven Charakter des Urteils die Thatsache etwas, dafs der Schufs versagt? Wenn man im täglichen Leben das nur mit hoher Wahrscheinlichkeit Geltende als sicher aussagt, so würde die Pedanterie, diese Einschränkung immer wieder zu betonen, langweilig, aber die Aussagen würden nicht an Objektivität einbüfsen, sondern gewinnen, und umsomehr, wenn wir die einschränkenden Möglichkeiten der Zahl nach anzugeben vermöchten. Wenn aus 1000 Kugeln, von denen 999 *s* und nur 1 *w* ist, eine

schwarze gezogen werden soll, so sagt Jedermann voraus, dafs eine *s* gezogen werden wird — vielleicht mit gröfserem Recht, als man den Erfolg beim Abdrücken des Gewehrs vorhersagt. Von unserem Urteil giebt es überhaupt keine Brücke zum Geschehen, und Erkenntnisurteile sind dann objektiv, wenn sie richtig sind, d. h. wenn derselbe Inhalt einem jeden Verstand den Anlafs zu derselben Verknüpfung der Begriffe giebt.

Der allgemeine Standpunkt der Sigwartschen Lehre ist nicht der unsere; gleichwohl bietet er uns keinen Anlafs, ihn mit dem Inhalt des Bernoullischen Satzes zu messen. Allerdings wird nach Sigwart der rein subjektive Charakter der Wahrscheinlichkeit dadurch nur „verhüllt", dafs die Beispiele aufser dem disjunktiven Urteile noch ein weiteres Wissen enthalten, wie beim Würfel alles, was wir von diesem auf den Erfolg schliefsen und aus Erfahrung wissen; aber ihm erleidet doch keinen Zweifel, „dafs für solche Fälle die Wahrscheinlichkeitsrechnung einen bestimmten Boden bekommt, der ihren Ergebnissen eine besondere Bedeutung sichert". Minder bestimmt, aber dem Wesen nach findet sich hier der Unterschied, welcher von Fries und Cournot zwischen der Beurteilung des einzelnen Falles und den Schlüssen auf die relative Häufigkeit des wirklichen Eintretens der einzelnen Möglichkeiten nach dem Mafse ihrer Wahrscheinlichkeit aufgestellt wird. Jene trennen terminologisch, was ihnen wesentlich zusammengehört; Sigwart bringt unter einen Terminus, was ihm selbst dem Wesen nach verschieden erscheinen müfste.

Wie ist es nun möglich, dafs man Schwierigkeiten hat, den von uns behaupteten Unterschied im Urteil zu bemerken? Wenn Sigwart sehr zutreffend lehrt, dafs mit der Aufstellung des disjunktiven Urteils „die eigentliche Deduktion" ein Ende hat, so möchten wir meinen, dafs verstandesgemäfs, und d. h. doch wohl objektiv nichts weiter zu erreichen ist, und dafs die sich anschliefsenden Fragen nur lauten können: Wie hat sich der Mensch gegenüber den Prädizierungen des Urteils, die sich ausschliefsen, und von welchen eine zutreffen mufs, und deren übrige zwar a priori möglich waren, von denen aber ebensowohl gelten könnte, dafs sie thatsächlich als unmöglich sich erweisen, zu verhalten? In Wissenschaft und Leben ist mit der Aufstellung des disjunktiven Urteils sehr häufig eine erste Aufgabe gelöst. Nun gilt es, nach weiteren Merkmalen zu suchen, die Möglichkeiten zu reduzieren, um so dem Zutreffenden immer näher zu kommen. Darf dies Verfahren, das für unsere

Betrachtungen nach den Vorausetzungen ausgeschlossen ist, das in der geringeren Zahl von Disjunktionsgliedern einen Fortschritt sieht, den Grund für die Maxime geben: je weniger Glieder, um so wahrscheinlicher ist ein jedes einzelne? Erstens übersieht man dabei, dafs eben jener Fortschritt ein relativer ist, der von Disjunktion zu Disjunktion eine ganz andere praktische Bedeutung haben kann. Und zweitens täuschen uns die Fälle, in welchen thatsächlich die Wahrscheinlichkeit, ein Prädikat zu e r r a t e n, zur Beurteilung steht, und jene, die sich auf das adäquate E r e i g n i s beziehen, welches das Prädikat in unserem Urteil auslösen würde, die Möglichkeit einer absoluten Bestimmung v o n d e r s e l b e n B e d e u t u n g für beide Fälle vor. So löst sich der Gegensatz in der Würfelaufgabe, den wir von STUMPF und ELSAS konstatiert haben (s. o. S. 70). Sie scheinen dasselbe zu meinen, aber in Wirklichkeit beurteilt ELSAS die Wahrscheinlichkeit, dafs die Sechs fallen werde, während STUMPF nur behaupten kann, dafs man dafür, unter sechs disjunkten Fällen den richtigen zu treffen, die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ setzen müsse.

Das lotteriemäfsige Verfahren, welches wir zuweilen kurz als Bedingung vorgeschrieben haben, enthält durchaus objektive Merkmale, und wenn sie alle in negativer Form sich aussprechen lassen, so scheint mir doch auch der mathematische Punkt an seiner Objektivität nichts einzubüfsen, wenn er diese Eigenschaft mit dem Begriffe des objektiven Zufalls teilt, wie man alle jenen systematischen Vorkehrungen des Spiels wohl nennen könnte, wofern man die Befürchtung überwindet, mifsverstanden zu werden. Dieser Zufall ist ein Ideal, das nicht zu verwirklichen ist; ein Verhalten, bei welchem wirklich die Bedingungen, an die für uns die Aussage der Quotienten geknüpft sind, zu ausschliefslicher Geltung kämen, bei dem also die sechs Seiten des Würfels in irgend einer Anordnung geworfen werden m ü f s t e n, würde alle Merkmale des Begriffes „Zufall" wieder auflösen und das ganze Problem unnötig machen. Wir würden wieder eine Mechanik des Zufalls statuieren, die es nicht geben kann, und wenn PREVOST und LHUILIER die „cas également possibles" auf ein solches Ideal stützen, das sie als Prinzip unter der Firma „hypothèse stochastique" mit den Worten:

> „Lorsqu'en vertu d'une certaine détermination des causes, plusieurs événements nous paraissont également possibles, nous feignons que tous ces événements ont lieu succesivement tour à tour et sans répétition" (Memoiren der Berl. Akad. 1796)

einführen, so braucht man nicht voreingenommen zu sein, um die

von ihnen behauptete „vollkommene Koincidenz“ mit den BERNOULLIschen Betrachtungen über die Teilungsregel und ihre Beziehungen zur „mathematischen Hoffnung“ zu bestreiten. Aber wichtig war mir der Gedankengang, der zu dieser extremen Fiktion geführt hat. Die Existenz der Kugeln ist sinnenfällig; sie sind alle da, so dafs man sie ziehen kann; die durch Kombination gezählten Fälle des Würfelspiels sind nur erschlossen. Die 36 Fälle, unter die ein zweimaliges Würfeln im individuellen Falle sich einreihen läfst, soll man so ansehen, als wenn sie wie jene Kugeln wirklich vorhanden und wir nur ungewifs wären, welchen Fall wir von den vorhandenen greifen. Sie wollen uns schematisch begreiflich machen, was unser durch die Anschauung gestütztes, begriffliches Denken im Grunde mühelos leistet, und was wir überall voraussetzen. Die Kombinationen dürfen nicht nur an logischen Elementen vorgenommen werden, sondern ihnen selbst müssen auch real mögliche nachweisbare Fälle entsprechen. Dann erst können wir jenen Quotienten eine Bedeutung beilegen, nach welchen sich unsere Erwartung vernünftigerweise richten darf. Vielleicht irren wir nicht, wenn wir hier hinreichenden Grund zu haben vermeinen, an die Worte KANTS zu erinnern: „Hundert wirkliche Thaler enthalten nicht das mindeste mehr als hundert mögliche. Denn da diese den Begriff, jene aber der Gegenstand und dessen Position an sich selbst bedeuten, so würde, im Fall dieser mehr enthielte, als jener, mein Begriff nicht den ganzen Gegenstand und dessen Position an sich selbst bedeuten; so würde, im Fall dieser mehr enthielte, als jener, mein Begriff nicht den ganzen Gegenstand ausdrücken und also auch nicht der angemessene Begriff von ihm sein. Aber in meinem Vermögensstande ist mehr bei hundert Thalern als bei dem blofsen Begriffe derselben (d. i. ihrer Möglichkeit).“ Für Bankiers hätte KANT diese Worte nicht zu schreiben nötig gehabt, aber den Philosophen sollten sie hinreichende Belehrung geben, damit sie auch dem Schein wehren, als könne das disjunktive Urteil allein eine Wahrscheinlichkeitsaussage stützen. Wenn von 10 Gliedern 9 unmöglich sein können, welchen Sinn hat es dann, auszusagen, die Wahrscheinlichkeit eines der Prädikate $p_1$ bis $p_9$ habe die Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$?

STUMPF ist wohl der einzige Schriftsteller, welcher die Lehre vom disjunktiven Urteil konsequent mit der Disziplin verknüpft. Erinnern wir uns, dafs ihm das Wahrscheinlichkeitsurteil, ähnlich wie SIGWART, eine Folgerung aus einem disjunktiven Urteil in Verbindung mit einer zweiten Prämisse, der Anerkennung völligen

Nichtwissens über die einzelnen disjungierten Glieder, bedeutet, so werden wir gespannt sein, wie er uns die selbst aufgeworfene, sehr richtige Frage beantwortet:

„Wie ist es nun möglich, aus einem Wahrscheinlichkeitsansatz, wenn er nur unsere Unkenntnis in Bezug auf eine Anzahl koordinierter möglicher Fälle ausdrückt, mit BERNOULLI einen annähernd sicheren Schlufs zu ziehen auf die Häufigkeit eines Ereignisses in einer grofsen Anzahl künftiger Fälle?"

Wir wollen versuchen, ihm Schritt für Schritt zu folgen. Nach einer kurzen Entwicklung der Gedanken, welche im BERNOULLIschen Satze enthalten sind, erfahren wir zunächst, dafs dessen Aussagen unter die Definition fallen, wie sie in der Abhandlung gegeben ist. Das kann nicht bestritten werden, denn wenn man mit irgend welchen Voraussetzungen in eine Rechnung sich einläfst, so können diese während derselben nicht entschlüpfen; wir geben ihm auch zu, dafs man aus den Formeln nichts herausliest, was man nicht hineingelegt hat, und sehen eben darum nicht ein, warum man das Theorem, wie STUMPF vorschreibt, als einen Satz der Kombinationslehre ausdrücken müsse. Soll denn nicht das, was hineingelegt wurde, auch darinnen verbleiben? Die Rechnungsoperation tritt ja völlig zurück und begründet nur das Resultat, das nach den verwandten Elementen zu deuten bleibt! Dafs der Ausdruck „Wahrscheinlichkeit" hier wegen der populären Nebenbedeutungen Mifsverständnisse verursachen könnte, ist ja bei zutreffender Bestimmung des aus „dem gewöhnlichen Leben entnommenen Begriffs" gar nicht zu erwarten, und wenn auch die Rechnung durch den dunkelsten Tunnel führte, so wäre doch vom Resultat zu verlangen, dafs es, bei Licht besehen, jene populäre Bedeutung noch aufzeigen könnte.

Was die ferner betonte „Irrelevanz aller zeitlichen Bestimmungen" angeht, so hatte schon LICHTENBERG, um die vorausgesetzte Unabhängigkeit der Fälle zu illustrieren, behauptet (Werke Bd. IX S. 32):

„Zwischen den einzelnen Würfeln läfst sich keine Verbindung denken; jeder Wurf ist ein erster von einer neuen Reihe, und seine Verbindung mit den vorhergehenden ist nur in unserer Vorstellung; hätte man den nächsten Wurf 100 Jahre hernach und 1000 Meilen von dem ersten Ort entfernt gethan, so würde die nämliche Verbindung unter ihnen gewesen sein; eine Sekunde oder 100 Jahre sind hier eine gleich starke Zwischenwand."

Bei STUMPF finden sich ähnliche Betrachtungen, die sehr plau-

sibel sind, aber wir waren sehr überrascht, im Anschluſs daran zu lesen:

„Hieraus erhellt nun recht deutlich, wie haltlos die versteckte Supposition irgend eines kausalen Einflusses der einzelnen Ereignisse aufeinander ist, demzufolge die späteren gezwungen würden, nach und nach Ordnung in die Reihe zu bringen, nachdem sie die früheren allzusehr haben gehen lassen."

Die Unabhängigkeit der Fälle voneinander ist nicht stillschweigende, sondern immer ausgesprochene Voraussetzung in den Lehrbüchern. Gegen Laplace kann sich die Bemerkung nicht richten, denn von ihm erzählt uns Stumpf die bekannte Anekdote jenes Vaters, der die Listen kontrollierte und sich über die vielen Knabengeburten ärgerte, die ihm, wie er meinte, die Geburt einer Tochter in Aussicht stellten. Auch den Miſsverstand der Lotteriespieler, den Laplace tadelt, eine längere Zeit nicht gezogene Nummer mit Einsätzen zu bedecken, erwähnt Stumpf an demselben Orte (S. 118). Soll sich die Bemerkung gegen den unmittelbar vorher genannten Cournot [1]) richten, so hatte dieser die ideale Unabhängigkeit in den Voraussetzungen der Beispiele geradezu in einer erkenntniskritisch nicht mehr haltbaren Weise auf das Geschehen in der Welt übertragen. „Es haben sich zwar gewisse Philosophen eingebildet, daſs alles in der Welt zusammenhänge, und dieses nach ihrer Art durch Subtilitäten oder Plaisanterien zu beweisen gesucht, ohne daſs sich jedoch der gesunde Menschenverstand dadurch irre leiten läſst; denn Niemand wird z. B. im Ernste daran denken, daſs er, wenn er mit dem Fuſse auf die Erde stampft, seine Antipoden oder das System der Jupiterstrabanten erschüttert . . . . . ." (Cournot S. 62). Damit disputiert uns Cournot die Kategorie der Wechselwirkung nicht fort, die wir notwendig denken, aber nicht in unkontrolierbare mikroskopische Verhältnisse zu verfolgen gezwungen sind.

Wofern nun die Unabhängigkeit der einzelnen Fälle nicht zugegeben werden muſs, weil sie niemals ernstlich bestritten worden ist, giebt das ein Recht, aus ihr zu folgern: „Weder mit Kausalverhältnissen noch mit physischen Thatsachen hat das Bernoullische

---

[1]) Wir können es nicht gut heiſsen, daſs Stumpf von Cournot, der das Bernoullische Theorem recte ableitet, dem nach seinem ganzen kritischen Verfahren nichts ferner war, als in demselben eine Prophezeiung zu sehen, auf eine etwas saloppe Bemerkung hin behauptet, daſs bei ihm das Theorem in der Form einer Prophezeiung ausgesprochen werde.

Theorem an sich das Geringste zu thun. Der Begriff konstanter objektiver Bedingungen überhaupt ist darin nicht mehr enthalten, als in dem nächsten besten arithmetischen Satze?“ Wir möchten dagegen fragen: Kann denn jene Nichtexistenz „eines kausalen Einflusses der einzelnen Ereignisse aufeinander“ anders als durch konstante objektive, reale Bedingungen gewährleistet werden? Und wenn unter einem halben Dutzend „allgemeiner Gesetze“ nur eines richtig sein kann und mufs (mit allen Lotteriekautelen), ist dann nicht in dem Urnenverstande, aus dem das wirklich herrschende Gesetz herauszuziehen wäre, eine so reale Bedingung gegeben, dafs man ihn geradezu nicht nur einer kleinen Lotterie vergleichen, sondern durch eine solche ersetzen könnte? In dem nächsten besten arithmetischen Satze ist von Kausalität so wenig als von Wahrscheinlichkeit zu entdecken; die Arithmetik zählt, was wir von ihr verlangen, und „behaupten, dafs das einzelne Ereignis $a$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ und $b$ $\frac{1}{5}$ habe, heifst zugleich behaupten, dafs die Verteilung $5\,a\ 1\,b$ die Wahrscheinlichkeit $\frac{6144}{15625}$ habe“ (Stumpf S. 85). Wenn ein Bataillon Soldaten 800 Mann stark ist, so halten drei Bataillone $3 \times 800$ Mann, und doch hat das Multiplizieren mit dem Kriegswesen und den Soldaten nichts zu thun. Hatte die Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{5}$ mit der Kausalität nichts zu schaffen, so hat es auch das durch Rechnung ermittelte Resultat $\frac{6144}{15625}$ nicht, aber das scheint mir zunächst nicht die Frage, sondern hat dieser letztere Quotient noch einen Sinn, wenn die ursprüngliche Bestimmung nur auf unsere Unkenntnis und die Disjunktion gegründet ist? Man wird vielleicht zugeben, dafs in der bisher wiedergegebenen Argumentation nichts zu erblicken ist, was auch nur den Schein einer Antwort enthielte. Bei dem ernsten Willen des Autors, zur Klarheit zu verhelfen, beginnt er in einem neuen Abschnitt mit Zweifeln zu kämpfen, die ihm selbst aufstofsen, und die wir an der Hand seiner Darstellung mitprüfen möchten. Leider kongruiert die Behauptung, dafs die „Bernoullische Wahrscheinlichkeit“ eine physische Deutung der „gleichmöglichen Fälle“ nicht voraussetze, nicht ganz mit der Frage, die zur Entscheidung steht. Soviel Vertrauen verdient die Mathematik, dafs ihre Operationen, wie ja mehrfach ausgeführt, Voraussetzungen nicht umzustofsen in der Lage sind; die Möglichkeit der Kombinationen ist völlig zuzugeben; nur dafs sie einen Sinn behalten, ist zu verlangen. Wir sollen bei Stumpf den „rein mathematischen Charakter des Satzes durchschauen und festhalten“, aber dann ist ja jede Bemühung, mit dem gesunden Menschenverstand

in Übereinstimmung zu bleiben oder zu kommen, unnötig; was an dem Satz mathematisch ist, mufs von jedem Verstande eingesehen werden, der seiner Beweisführung folgen kann. Indessen hören wir STUMPF selbst (S. 87):

„Wenn wir wissen, dafs in einer Urne *w* und *s* Kugeln in gleicher Anzahl vorhanden sind (= Fall *A*), so entspricht es nicht blofs der Rechnung, sondern auch dem gesunden Menschenverstand, dafs bei sehr vielen Ziehungen (mit Wiederhineinlegen und Schütteln) ungefähr dasselbe Verhältnis sich herausstellt. Wenn wir aber nur wissen, dafs überhaupt *w* und *s* Kugeln darin sind (= Fall *B*), so entspricht es dem gesunden Menschenverstand keineswegs, bei sehr vielen Ziehungen mit fast völliger Sicherheit eine Verteilung 1 : 1 zu erwarten."

Das ist sehr zutreffend, und wir halten es in der That für ratsam, daraufhin allein, wie STUMPF als notwendig befürchtet, „die Grundbestimmungen zu revidieren"; denn wenn sich für zwei so verschiedene Fälle wie *A* und *B* dieselben Resultate ergeben, so mufs irgendwo eine innere Absurdität stecken, und wenn den Verfasser die „Schwierigkeit einige Zeit peinigte", so ist zu bedauern, dafs er sich mit der folgenden Lösung, die ihm einfach genug erscheint, zufriedengestellt sah (S. 88):

„Denken wir uns statt einer Urne im Falle *B* soviele Urnen, als Ziehungen stattfinden sollen, z. B. 20 000, und jedesmal werde aus einer andern gezogen. Wir mögen wissen, dafs in jeder Urne *w* oder *s* oder eine Mischung aus beiden Sorten sich befinde, aber nicht den geringsten Anhaltspunkt haben, irgend eine Absicht oder sonstige konstante Ursache zu vermuten, welche eine gewisse Gleichmäfsigkeit in der Füllung der Urnen hätte bedingen können. Hier wird es auch dem gesunden Menschenverstand nicht zuwiderlaufen, als Endergebnis der Ziehungen mit grofser Wahrscheinlichkeit eine annähernd gleiche Verteilung von *w* und *s* zu erwarten", und nun folgen die oben auf S. 112 wiedergegebenen Worte, nach welchen „diejenigen Umstände, über welche wir uns disjunktiv in völliger Unwissenheit befinden, als unbeschränkt variabel vorausgesetzt werden dürfen".

Ja, aber! ist denn das alles nicht eine physische Deutung der „gleichmöglichen Fälle"? Oder kann man durch blofses Denken 20 000 Urnen produzieren und jene Variabilität bewirken, die doch nur garantiert sein kann, wofern den Voraussetzungen reale Verhältnisse entsprechen? Wenn man raten läfst, so kann man die

Variabilität herstellen, indem man immer einen andern Menschen zum Raten nötigt; es ist dann nur zu registrieren: richtig oder falsch; man darf aber nicht mehr für das Kugelbeispiel schwarz oder weifs notieren, wenn man auch die Farben im Zuge abwechseln läfst, weil man dann zusammengesetzte Verhältnisse zu berücksichtigen hätte. Das wäre das Eine, aber die Vergröfserung der Urnenzahl bis ins Unendliche ändert doch an den Bedingungen nicht das mindeste; der gesunde Verstand wird jede Verteilung ohne irgend eine Verwunderung sich in den Zügen entwickeln sehen, aber er wird so wenig mit grofser Wahrscheinlichkeit als „mit fast völliger Sicherheit" irgend eine Verteilung zu erwarten berechtigt sein. Das kann die Menge doch nicht bringen, und kein Mensch würde auf die ungefähre gleiche Verteilung in 20000 zunächst unsichtbar vorgenommenen Ziehungen auch nur zu wetten bereit sein.

Sigwart hatte sehr zutreffend von seiner Definition behauptet, dafs sie auch gelte, wenn ein Teil der Disjunktionsglieder aus Gründen, die wir nicht kennen, thatsächlich unmöglich ist. Will er das festsetzen, so fragt es sich nur, ob es anerkannt wird, und da „die disjunktiven Urteile und die daraus abgeleiteten Wahrscheinlichkeitsbrüche ... ursprünglich und für sich nichts über das Verhältnis der Häufigkeit des wirklichen Eintretens der sich ausschliefsenden Fälle" sagen, so können auch die unmöglichen Kombinationen, die im Bernoullischen Satze notwendig mitgezählt werden, die systematische Behandlung nicht stören. Es werden und müssen sich auch mögliche und daher auch die zutreffende Kombination bei allen Zusammensetzungen vorfinden; so wenig aber die gleiche Wahrscheinlichkeit ausgesagt werden kann, wenn man die Möglichkeit einzelner Disjunktionsglieder in Zweifel zieht, ebensowenig kann den absoluten Wahrscheinlichkeiten im binomischen Satze, die durch Zusammenziehung einer Anzahl von Gliedern der Einheit beliebig nahe gebracht werden können — schon bei der dritten Potenz ist bei gleicher Wahrscheinlichkeit für den Fall mindestens einer schwarzen unter sonst weifsen Kugeln $1 - \frac{1}{2^3} = \frac{7}{8}$ zu setzen, eine Gröfse, die in sich zusammenfällt, wenn keine schwarze Kugel vorhanden war — nur die geringste Bedeutung für unsere Erwartung zugesprochen werden. Weit entfernt, einen Leitfaden zu erhalten, würde sie beständig gewarnt werden müssen, den Rechnungen der Logik auch Glauben zu schenken. Man denke

sich die wissenschaftliche Arbeit, die sich mit einer Disjunktion von mehr als zwei Gliedern nicht an den binomischen, sondern an den polynomischen Satz halten wollte mit dem ganzen Ballast unmöglicher Kombinationen; hieſse das nicht, die Lotterie des disjunktiven Urteils um Tausende und Millionen von Nieten unnütz vermehren? Denknotwendig sind die Kombinationen mit allen Urteilen, die sie zulassen, als Möglichkeiten, von welchen nur eine zutrifft, oder eine beschränkte Zahl auch real möglich sein kann, aber was soll man damit anfangen? Sind nicht schon in den extremen Fällen der historischen Theorie Schwierigkeiten genug vorhanden, an denen sich auch die Philosophen abgemüht haben? Man hat sich mit und nach D'ALEMBERT mit dem „physisch Unmöglichen" geplagt — indem man die höchst unwahrscheinlichen, aber doch als möglich mitzurechnenden extremen Fälle im Spiel mit der Thatsache verglich, daſs es mathematische Gebilde, wie die gerade Linie, eben nur in unserer Anschauung und nicht in Wirklichkeit giebt —, soll man nun mit einem Anschein von Recht und keinem von praktischem Erfolg auch das absolut Unmögliche mit in die Rechnung verweben?

Jene 20 000 Urnen können nach der Voraussetzung sehr wohl ausschlieſslich $w$ Kugeln enthalten, ohne daſs hierin auch nur etwas „physisch Unmögliches" im Sinne D'ALEMBERTS oder COURNOTS zu erblicken wäre. Was soll also die Rechnung? Erst durch die objektiven Voraussetzungen erhält die Rechnung ihre Basis, und ich kann zu meiner Freude konstatieren, daſs das mir während der Niederschrift dieser Arbeit vor Augen gekommene Lehrbuch BERTRANDS diese Voraussetzungen sehr scharf ausspricht (S. 146). Man mag dort nachlesen; eine kurze Bemerkung soll noch dem zweiten Beispiele STUMPFS gewidmet werden, bei dem es sich um einen „unbekannten 6seitigen Körper von vielleicht ganz unregelmäſsiger Gestalt" handelt. Wir lesen dort:

„Es entspricht vollkommen dem gesunden Menschenverstand, daſs unter 24 000 6seitigen Körpern, bei deren Bildung keinerlei Absicht oder sonstige gemeinsame Ursache zu vermuten ist, und deren einzelne Flächen prinziplos, blindlings mit $a$ bis $f$ bezeichnet wurden, jeder Buchstabe annähernd 4000mal am Boden aufliege." Darüber ist nicht zu streiten, denn, alles was geschieht, kann dem gesunden Verstand auch nicht zuwider sein. Indes heiſst es weiter: „Die Wahrscheinlichkeitsaussage würde denn auch nichts weiter sein, als das Ergebnis der (indirekten) Abzählung derjenigen unter

allen Kombinationen und Permutationen, welche unter den Begriff „annähernd 4000 auf 24000" fallen, sobald er mathematisch genauer definiert wird (z. B. zwischen 3950 und 4050 auf 24000)." Wie gezählt wird, ist gleichgültig; ob direkt oder mit Hülfe allgemeiner Beziehungen, ändert nichts; es ist nur die Frage, ob richtig und wesentlich, wie man trotz des mathematischen Charakters zugeben wird, was gezählt worden ist. Trotzdem Stumpf in diesem Beispiele wieder erhebliche Konzessionen durch objektive Voraussetzungen macht — die prinziplos blindlings mit *a* bis *f* bezeichneten Flächen sind doch etwas anderes als eine Bezeichnung, über deren Tendenz ich in absoluter Unkenntnis bin —, so habe ich es mir die gröfste Mühe vergeblich kosten lassen, seine Argumentation mit meinem Denken in Übereinstimmung zu bringen. Vielleicht ist es aber doch nicht so ganz unwichtig, wenn man den Gedankengang etwa durch den folgenden ersetzt.

Wenn einer dieser Würfel irgendwo liegt, so mufs er entweder mit *a* oder *b* oder *c*···· oder *f* aufliegen (sehr möglich natürlich, dafs einer oder mehrere Fälle ausgeschlossen, d. h. unmöglich sind).

Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Buchstaben zu erraten, ist $\frac{1}{6}$, ihn nicht zu erraten, ist $\frac{5}{6}$; also wird es auch bei 24000 Menschen, die raten, am wahrscheinlichsten sein, dafs das Protokoll 4000 richtig und 20000 unrichtig ergiebt, dafs also wirklich die Ereignisse sich im Verhältnis der ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten abspielen. Alle anderen Schlufsfolgerungen behalten natürlich ihren Sinn, auch wenn man es vorzieht, die 24000 Menschen gleichzeitig ins Examen nehmen zu lassen. Was man gezählt hat, liefs sich aber nicht auf die beiden Begriffe Untenliegen des Buchstaben *f* und Nichtuntenliegen u. s. w. bringen, sondern gehörte unter die Fälle richtig und falsch geraten. Es würde uns freuen, wenn Stumpf sich dieser Interpretation, die uns nicht bedeutungslos erscheint, anschliefsen könnte, wie wir unsererseits gern zugeben, dafs aus dem disjunktiven Urteile und der Prämisse über die absolute Unkenntnis des richtigen Prädikats nicht die Wahrscheinlichkeit dieses Prädikats, sondern die, es zu erraten, mit dem definierten Quotienten resultiert, und dafs sich daraus alles folgern läfst, was den Kombinationen einen Sinn beläfst. Es liegt ja auf der Hand, dafs mit dem Schritte von der einfachen zur zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit die Schwierigkeit der Abzählung der Möglichkeiten beginnt.

Wer die Disziplin auch nur oberflächlich kennt, der wird bemerkt haben, dafs man jeden Schritt unter Umständen durch neue Bedingungen rechtfertigen mufs, wie es z. B. einen Unterschied bedeutet, ob die gezogene Kugel wieder zurückgelegt wird oder nicht, dafs ferner die Rechnung wie ein überempfindliches Instrument auf unrichtige Interpretationen reagiert, so dafs man schon aus diesem Verhalten abnehmen könnte, dafs der Ansatz, den ich nur unter Wahrung schärfster Kongruenz mit den Objekten aufrecht erhalten und erweitern kann, besonders in seinem Fundament nicht blofs logisch, sondern durch das festeste Gestein gesichert sein mufs, etwa wie ein Kartenhaus, das man aufbaut, eine sicherere Unterlage verlangt, als ein anderes, das mit minder feinem Material in die Höhe gerichtet werden soll.

Zum Schlufs mag noch einmal das Würfelspiel mit 24000 Würfeln für einen Augenblick uns beschäftigen. Wir wollen annehmen, sie seien alle tadellos in mathematischer und physikalischer Hinsicht. Jede Seite sei entweder mit 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 bezeichnet, aber wir wüfsten gar nichts darüber, wie die Zahlen angeordnet wären. Jede Seite desselben Würfels kann dieselbe Zahl oder auch verschiedene haben, kurz, unsere Unwissenheit darüber ist eine vollkommene. Wohlverstanden, die Aufgabe läfst als Möglichkeit zu, dafs alle $6 \times 24000$ Seiten mit derselben Zahl oder sonst in irgend einer Anordnung mit den 6 Zahlen versehen sind. Wird unsere „fast völlige Sicherheit", in nahezu 4000 Fällen eine 6 aufliegen zu sehen, auch dann nicht erschüttert werden?

---

# Die Bayessche Regel.

Die Weitläufigkeit, zu der uns bisher weniger der Gegenstand als die existierenden Kontroversen veranlaſst haben, war unumgänglich. Es ist auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeitsrechnung und in ihrer Litteratur fast wie auf einem groſsen Manöverfelde, nur daſs hier glücklicherweise ein Höchstkommandierender ein- für allemal entscheidet, wer den Sieg davongetragen hat, und daſs nur so im groſsen und ganzen überschlagen zu werden braucht, wer gefallen ist, und wer wohl im Ernstfalle noch das Leben behalten hätte. In keiner andern Disziplin, auch in der Metaphysik nicht, ist die Möglichkeit des „seligen Rittmeisters" — einer Hackländerschen sehr plausiblen Manöverfigur —, der nach einer vernichtenden Kanonade munter weiter ficht, so indiziert, wie in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die sich auf ihr Recht steift, Wahrscheinliches auszusagen, und durch kein sicheres Resultat ad absurdum geführt werden kann [1]).

[1]) Man liest vielleicht nicht ungern die folgenden Sätze aus Bertrand, Calcul des probabilités. S. XXXIX: „La masse de Jupiter, déduite par Newton de l'étude des satellites, corrigée peu à peu par les progrès des observateurs, calculée de nouveau par Bouvard á l'aide des perturbations de Saturne, semblait fixée à $\frac{1}{1070}$ de cette du soleil. Les principes du calcul des chances permettaient de parier, suivant Laplace, 999 308 contre 1 que l'erreur n'est pas la centième partie de la valeur trouvée. Quelle ostentation de consciencieux savoir! C'est 999 308 fr., ni plus ni moins, que l'on peut risquer contre 1 fr. On aurait eu tort de risquer dix sous; on les aurait perdus; les perturbations de Junon l'ont prouvé. Sans contester ce témoignage irréprochable de la petite planète, Poisson maintenait les principes. „Les calculs de Laplace, dit-il, ont donné, avec une précision voisine de la certitude, une masse plus petite qu'elle n'est réellement. Cela ne provient d'aucune in-

Die Naturwissenschaften und die Geschichte können sehr wohl eine Inventur ihrer Resultate aufnehmen, und die zweifelhaften Forderungen haben doch wenigstens potentialiter ein Recht auf spätere Erfüllung. Betreffs der Metaphysik wird man sich auch angesichts des besonderen Schicksals der Vernunft in einer Gattung ihrer Erkenntnisse: „dafs sie durch Fragen belästigt wird, die sie nicht abweisen kann, denn sie sind ihr durch die Natur der Vernunft selbst aufgegeben, die sie aber auch nicht beantworten kann, denn sie übersteigen alles Vermögen der menschlichen Vernunft“, vielleicht zu fragen haben, wieviel die Einsicht dieser zuletzt citierten Worte KANTS und wieviel die Thatsache, dafs der spekulierende Philosoph durch die unendliche Ausdehnung der heutigen Wissenschaft eingeengt und von den Einzeldisziplinen scharf kontroliert wird, dazu beiträgt, die Welt vor neuen Systemen zu bewahren. Für die Wahrscheinlichkeitslehre ist es fast als ein Glück zu betrachten, dafs man sich des Charakters einer, wenn auch noch so rationellen Konvention nicht bewufst geworden, und in ihr das Mathematische als eine hinreichende Garantie anzusehen geneigt gewesen ist; der Spielraum, den eine jede Übereinkunft immer noch offen läfst, wäre sonst sicher benutzt worden, und man hätte, ähnlich wie man sich auf Kongressen über allgemeine Mafse einigt oder auch nicht, sich auch noch mit Wertungen in verschiedenen Mafssystemen abzufinden.

Die Domäne der BAYESschen Regel ist die Wahrscheinlichkeit der Hypothesen. Jeder neue Begriff bringt der Disziplin neue Schwierigkeiten; es fragt sich nicht allein, ob sie auch für neue Probleme ihre Tragkraft erweist, sondern auch, ob man mit den allgemeinen Erkenntnisprinzipien weiter arbeitet, und ob eine Kongruenz der Aufgaben nach ihrer Bezeichnung und nach deren Sinn bestehen bleibt. Was ist hier unter einer Hypothese zu verstehen? Die ὑπόθεσις in den Aufgaben EUKLIDS ist eine Setzung, die in ihre Konsequenzen verfolgt werden soll, an der Hand des Verstandes und der Anschauung und unter Anwendung von feststehenden Ergebnissen, die, als schon erwiesen, sämtlich stillschweigend mit-

---

exactitude dans les formules dont il a fait usage; il y a lieu de croire que la masse de Jupiter, un peu trop petite, resulte de quelques termes fautifs dans l'expression des perturbations.“ POINSOT, son spirituel adversaire, pour transformer l'apologie en épigramme, ne change rien au trait que l'accent: „Après avoir calculé la probabilité d'une erreur, il faudrait calculer la probabilité d'une erreur dans le calcul.“

gesetzt werden. Die logische Unabhängigkeit der einzelnen Aussagen mufs dabei überall gewahrt sein; man darf sich nicht im Kreise drehen, und die mathematische Praxis ist hier eine vorbildliche.

Wir haben behauptet, dafs in den Aufgaben der Lehrbücher die Möglichkeiten, für die wir einen realen Thatbestand verlangen, wenn wir sie in den Rang von Wahrscheinlichkeiten erheben sollen, hypothetisch aufgestellt werden. Ist es das nun, was auch hier unter den Hypothesen zu verstehen sein wird? Voraussetzung in jenem Sinne ist diese Urne mit ihren 10 *w* und 10 *s* Kugeln; gefolgert soll die Wahrscheinlichkeit einer Ziehung werden. Jetzt wird die Sache umgedreht. Voraussetzung, Hypothese, ist in den Aufgaben eine irgendwie gegebene Ziehung, und es soll auf die Urne und ihren Inhalt geschlossen werden. Das kann natürlich, wenn man nicht alle Kugeln herausnimmt und so durch Abzählung die Schlufsfolge unnötig macht, nur in der Form eines Wahrscheinlichkeitsurteils geschehen. Zunächst ist an eine wichtige Voraussetzung zu erinnern: die sämtlichen vorhandenen Kugeln müssen mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen werden können; was wissen wir nun aber von der Urne? Wir wollen annehmen, schlechterdings nichts. Dann bleibt als einziges Datum das Ziehungsresultat. Gleichviel nun, ob die Kugeln vor jedem neuen Zug wieder in die Urne gelegt werden oder nicht: ist eine hinreichend grofse Zahl von Ziehungen erfolgt, so werden wir die Annahme machen, bei der uns das Resultat am verständlichsten sein würde, d. h. wir werden es für am wahrscheinlichsten halten, dafs das Zahlenverhältnis der Kugeln auch dem des Resultats entspricht. Das ist schematisch das Verfahren, das wir auch sonst einschlagen, wenn uns alle Daten zur Erklärung einer Erscheinung fehlen. Das Ziehen irgend einer Kugel interessiert uns nicht als mechanischer Vorgang, den wir als erklärt und begrifflich fixiert voraussetzen, so dafs wir die Züge nur nach dem Erfolg unterscheiden; alles ist uns gleichgültig bis auf das Mischungsverhältnis der Kugeln in der Urne. Wir schütteln oder drehen, um uns von einer bestimmten Anordnung der Kugeln unabhängig zu machen, wie wir im Experiment die mannigfaltigen unserer Kenntnis unterliegenden Einflüsse zu beseitigen trachten. Ähnliches können wir auch durch die Richtung der greifenden Hand bewirken; wofern aber die Kugeln in fester Anordnung gelagert sind und nach dieser erscheinen müssen, wenn ich sie etwa aus einem Cylinder vom Durchmesser der

Kugeln habe herausrollen lassen, so ist schlechterdings kein Schlufs auf das Mischungsverhältnis möglich. Auch wenn ich noch so viele Kugeln bereits dem Behälter entnommen hätte. Keine Abzählung der Möglichkeiten kann mich auch nur einen Schritt weiter bringen. Im Gegenteil, nehme ich an, es seien 20 Kugeln in dem Cylinder, so würde sich für den Fall, dafs sie alle weifs sind, wieder unter Berücksichtigung der Kombinationen, die minimale Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2^{20}}$ ergeben, eine Zahl, die a priori auszusagen nicht das geringste Recht vorlag. Dieser letzten Wertung entspricht vielmehr als objektive Voraussetzung, dafs an jeder Stelle des Cylinders ebensowohl eine *w* wie eine *s* Kugel sein könne. Mische ich also die Kugeln nicht, bringe ich die Variabilität der Umstände auch nicht durch die Freiheit der Bewegungen, welche einen Zug bewirken können, in die Aufgabe hinein, oder überlasse ich für das Beispiel einer festen Anordnung nicht die Bezeichnung irgend einer Stelle der Willkür meiner Aussage, indem ich etwa die 7., 12. oder sonst eine — auch wohl durch das Los — bezeichne und dann diese registriere, indem ich für alle anderen meine Unbefangenheit aufrecht erhalte, so ist für irgend einen Rückschlufs von den Ziehungen auf die Mischung gar kein Boden vorhanden. Weifs ich wirklich, dafs in jenem Cylinder an jeder Stelle gleich gut eine *w* oder eine *s* Kugel vorhanden sein kann, so genügt das Bernoullische Gesetz, meine Wahrscheinlichkeitsaussage zu bestimmen. Ist das nicht der Fall, und zeigen sich in irgend welcher Ordnung *m* schwarze und *n* weifse Kugeln, so mufs ich mein Urteil über die anderen aussetzen. Jede logische, methodische Hülfe, sie zu beurteilen, ist ausgeschlossen. Man bemerke, dafs ein so jeder Bestimmung entbehrender Sachverhalt praktisch fast niemals vorkommt; wenn aber, so bietet sich kein Rechtsgrund zu irgend einer Aussage, und wenn man gleichwohl gezwungen sein sollte, irgend etwas auszusagen, so bleibt kein Ausweg als der zu losen. Dann kann man das Resultat der Lotterie mit einem Quotienten werten, der aber nach seinem Inhalte von der Aussage über das Mischungsverhältnis in der Urne total verschieden ist. Man wird ferner einsehen, dafs man diese Lotterie nach dem disjunktiven Urteil mit gleichwertigen Prädikaten einzurichten hat; jedes mögliche Mischungsverhältnis bekommt eine e i n z i g e Nummer; die Permutationszahl spielt in der Frage gar nicht mit. Es war und ist für uns weniger

die Frage, welcher Wert der Disziplin zukommt, als inwieweit und ob sie richtiges Denken zum Ausdruck bringt.

Es wird aus dem Vorigen hervorgehen, dafs alle Einteilungen, die nur logisch Fälle abgrenzen, zu keinem irgendwie objektiv berechtigten Urteil gelangen können, und dafs auch hier ein scharf charakterisierbarer Thatbestand gegeben sein mufs, der das Urteil zu erfüllen hat.

Für den dürftigen schematischen Inhalt aller unserer Beispiele wird die Wahrscheinlichkeit einer Annahme verlangt, die uns das Ziehungsresultat verständlich macht. Eben deshalb bleibt diese Annahme eine Hypothese, ein Erklärungsversuch, im Sinne einer jeden Erkenntnisart. Jede Hypothese ist nur wahrscheinlich, und unser Sprachgebrauch, der sie gelegentlich in den Rang einer Theorie erhebt, will damit lediglich zum Ausdruck bringen, dafs man sie nicht in wenigen Worten formulieren, sondern dafs sie selbst den systematischen Inhalt einer ganzen Lehre erfüllen kann. Es sind hier Unterschiede gradueller Natur, die sich auch nach dem Umfange richten, innerhalb dessen die Aufstellungen unseres behutsam tastenden Verstandes die Orientierung bewirken können. Ich weifs nun nicht, ob es Hypothesen geben kann, welche des kausalen Moments völlig entbehrten. Wenn mir eine Urne zur Verfügung gestellt wird, von der ich gar nichts weifs, so werde ich gut thun, über ihren Inhalt nichts auszusagen. Sagt man mir: es sind $s$ oder $w$ oder $s$ und $w$ Kugeln darin, $n$ an der Zahl, so haben wir den oft besprochenen Fall, mit dem zunächst wieder nichts anzufangen ist, es sei denn, dafs man uns verraten wollte, woher die Kugeln stammen. Die Wahrscheinlichkeit des Mischungsverhältnisses wird erst zu einer Hypothesenwahrscheinlichkeit, wenn aus der Urne gezogen worden ist. Die Hypothese soll etwas erklären; bevor aber etwas geschehen ist, ist sie gar nicht vonnöten. Ob wir es also mit Kugeln zu thun haben oder mit soviel Urnen, von denen eine irgendwie in unsern Besitz gespielt worden ist, bleibt sich völlig gleich. In den üblichen Aufgaben ist nicht mehr wie alles, was uns gegeben wird, hypothetisch, und man thut gut, diesen Charakter nicht stillschweigend in Aufgaben hineinzubringen, die im Grunde Schemata für unser Verfahren in der Wirklichkeit sein wollen.

Wenn mir der I n h a l t der Urne gegeben ist, so soll ich auf das mit dem Quotienten schliefsen, was wahrscheinlich geschehen wird. Im einzelnen Falle kann ich mein Urteil durch einen Quotienten präzisieren, der begrifflich scharf bestimmt ist, aber keinerlei Bedeutung als eine bündige Voraussage für sich fordern kann.

Seine praktische Verwertung läſst uns hier ganz unberührt; daſs wir mit dem vorausgesetzten Spielraum von Möglichkeiten keine bestimmte als sicher bezeichnen können, versteht sich von selbst, aber fragen wir nach den Bedingungen in unserem Erkenntnisvermögen, die das Urteil ermöglichen, so ist es der Schluſs von der Ursache auf die Wirkung, der uns leitet. Was gehen uns dabei alle anderen Kausalitätsbeziehungen an, die mit im Spiele sind: daſs wir ziehen, wie wir wollen, daſs in unserem Centralorgan irgend etwas kommandiert, das irgend eine Bewegung auszulösen hat u. s. w.! Hier ist das Frühere, die Urne, dort die Kugel, die ihr entnommen wird, eines mit den anderen verbunden, der „Zug der Kugel“ und die Urne, die sie hergiebt; Sprachgebrauch hin, Sprachgebrauch her, nur das Prinzip der Kausalität ist imstande, wie diesen Zug, so unser Wahrscheinlichkeitsurteil zu garantieren.

Wenn man von der Wahrscheinlichkeit der Hypothesen spricht, so ist man sich meistens bewuſst, daſs man einen Begriff gebraucht, der in der Physik das feste Band zwischen der bekannten Erscheinung und ihren Bedingungen knüpfen soll, während er hier einem Gegenstande dient, der keinen rechten Schatten wirft. Man pflegt sich gewissermaſsen des Gebrauchs einer so achtbaren Bezeichnung zu genieren und auch den Begriff der Ursache mit einer Art von Unbehagen zu gebrauchen, obwohl ja eine Hypothese nichts anderes sein kann, als die Setzung eines Zusammenhangs, der einen Vorgang erklärt, soweit er eben erklärungsbedürftig ist. So liest man bei Bertrand (S. 143):

> „Etudier les faits pour remonter aux causes est le but le plus élevé de la Science. Notre curiosité est ici moins ambitieuse. Nous n'aurons dans ce Chapitre aucune loi de la nature à discuter, aucune énigme à resoudre. Les causes sont pour nous des accidents qui ont accompagné ou précédé un événement observé.“

Ich möchte diesen Worten einen Ausspruch aus dem Aufsatze von Prevost und L'huilier (S. 26) gegenüberstellen, der sich auf denselben Gegenstand bezieht:

> „Je remarque d'abord que les mots cause et effet sont pris ici dans un sens extrêmement général. Car le même principe d'estimation s'appliquerait aussi bien au signe et au signifié.“

Wenn man zuweilen liest, wir sollen unter Hypothese eben die Bedingungen verstehen, die uns zu der Wahrscheinlichkeitsaussage veranlassen würden, mit der wir sie in der Rechnung

wirken lassen, so umgeht man die Schwierigkeit, aber man sieht daraus, dafs man auch hier nicht mit seinen ursprünglichen Definitionen in Konflikt geraten kann, weil man auf ihnen weiter baut. Eine zweite Frage ist nur, ob sie unter allen Umständen auch ihren Sinn behalten. Sagt man in aller Schärfe, in welchem Sinne man die Begriffe Hypothese oder Ursache gebrauchen will, so ist dagegen nichts einzuwenden; uns ist die terminologische Frage auch von geringerer Bedeutung. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist uns im wesentlichen ein Ausdruck für die Konkurrenz im Geschehen, die nur an die Zahlenverhältnisse gebunden ist; alle unsere Beispiele, soweit sie in der Abstraktion gehen, haben keinen anderen Sinn, als zu zeigen, wie sich die Zahlen geltend machen, wenn wir alle anderen kausalen Einflüsse dem Urteil entziehen. Weit entfernt, an einen versteckten, mystischen Einflufs der Kombinationen zu denken, geschweige an ihn zu glauben, sehen wir in dem Kalkul eine konforme Abbildung der Gedanken, mit welchen wir an den durch unsere Voraussetzungen von Nebenursachen freien und nur in der Produktion zahlenmäfsig charakterisierbaren Verlauf gewisser Erscheinungen herantreten. In logischer Parallele ist uns jede schwarze Kugel ein Grund für ihr Erscheinen; wo sie sich zeigt, war ihre Existenz eben die reale Bedingung dafür, dafs sie in die Erscheinung treten konnte. War sie mit 10 *w* Kugeln zugleich vorhanden, so war a priori gerade der Zug einer *s* Kugel minder wahrscheinlich, aber mein Urteil, dafs in einer zahlenmäfsig angebbaren Weise die in gröfserer Zahl vertretene Art obsiegen mufs, bleibt richtig, wenn sonst meine objektiven Voraussetzungen zutreffen. Wo ist eine Ursache aufzuweisen? Nur in unseren Gedanken; in der Wirklichkeit entspricht ihr nichts. Man zeige etwas, das wirkt. Der Ofen ist die Ursache der erwärmten Stube — nun kommen Physiker und Chemiker, die mich eines Besseren belehren —, und doch bleibt mein Urteil richtig. Der Begriff der Ursache ist fest; aber die Ursache, die man bezeichnet, ist immer relativ. Man mag es nur gelten lassen; in den Beispielen der Disziplin ist das Mischungsverhältnis die Ursache, von der der Zug oder eine Reihe von Zügen als die Wirkung aufzufassen ist — in der blassen Färbung, die ein so einseitiges Kriterium, wie die Zahl, geben kann. Also man sträube und ziere sich nicht gegen die Wahrscheinlichkeit der Ursachen.

Wenn vor uns zwei Urnen stehen, die völlig ununterscheidbar sind bis auf den Platz, den sie nicht gemeinsam haben können,

wenn in der einen an Kugeln

$$1\,s \qquad 3\,w \qquad (\alpha),$$

in der andern $$4\,s \qquad 1\,w \qquad (\beta)$$

sich befinden, und von irgend Jemand, der den Inhalt der Urnen nicht kennt, 1 $w$ gezogen worden ist, so wird Jedermann, nach seinem Urteil befragt, meinen, es sei wahrscheinlicher, daſs die Urne ($\alpha$) als die andere in Anspruch genommen worden ist. Diese Aufgabe erhebt keinerlei Prätensionen auf einen empirischen Charakter, sofern damit ein Gegensatz zur Natur der früheren behauptet werden soll; man nehme sie als das, was sie ist, als ein Schema für ein mögliches Geschehen, das zu beurteilen ist.

Sowohl die Urne ($\alpha$) als die Urne ($\beta$) konnten das Resultat hervorbringen; man ziere sich auch gegen diesen Ausdruck nicht; daſs gezogen wurde, ist ja völlig gleichgültig; wesentlich ist nur, daſs keiner Kugel eine, gleichviel ob geheimnisvolle oder bekannte, Kraft innewohnte, eher als eine andere zu erscheinen.

Wieviel günstige Fälle waren überhaupt möglich? Man sieht leicht, es konnten 1 von 3 $w$ der Urne ($\alpha$) und 1 $w$ der Urne ($\beta$) gezogen werden, und wenn man in die erste griff, so war der Quotient

$\frac{3}{4}$, für die zweite der Quotient $\frac{1}{5}$

als vorherige Wahrscheinlichkeit für 1 $w$ Kugel bestimmend. Faſst man die Frage nach dem Ursprung der Kugel als eine Aufgabe für zusammengesetzte Verhältnisse auf, so war in unserem Beispiel es gleichwahrscheinlich, ($\alpha$) wie ($\beta$) zu treffen; die Wahrscheinlichkeit, aus ($\alpha$) die weiſse Kugel zu ziehen, war also

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}$, sie aus ($\beta$) zu entnehmen $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}$.

Wir wollen vorübergehend die erste Gröſse $M_\alpha$, die zweite $M_\beta$ nennen, so wird man im Sinne unserer früheren Betrachtungen zugeben, daſs die Wahrscheinlichkeiten $P_\alpha$ und $P_\beta$, welche sich auf die Frage nach der Urne beziehen, aus welcher gezogen worden ist, die Proportion

$$P_\alpha : P_\beta = M_\alpha : M_\beta$$

befolgen, die in Verbindung mit der Bedingung

$$P_\alpha + P_\beta = 1$$

die Werte ergeben:

$$P_\alpha = \frac{M_\alpha}{M_\alpha + M_\beta} \qquad P_\beta = \frac{M_\beta}{M_\alpha + M_\beta}.$$

Aus dem gewöhnlichen Verstande liegt dieser Argumentation eine Maxime zu Grunde, die wir alltäglich üben. Hier wird sie in eine zahlenmäſsige Form auf der Basis von festen Voraus-

setzungen geprefst, die alles Geschehen nur unter dem Gesichtspunkte der numerischen Faktoren zu beurteilen gestatten. Im extremen Falle ist es die Überzeugung, dafs der Apfel, der im Garten zur Erde fällt, vom Apfelbaum stammt und nicht, was immerhin möglich ist, durch den Nachbar geworfen worden ist[1]). Bei diesem Urteil fragen wir allerdings nicht nach der Kausalreihe, die den Apfel hervorgebracht hat; auch der Wind und die Fallgesetze, die Gesetze der Innervation, die bei dem guten Nachbar wirken, kurz, all das ist uns gleichgültig. Der Apfelbaum ist uns die wahrscheinlichste Ursache für das Ereignis, dafs im Garten ein Apfel zu Boden fällt.

Uns erscheint diejenige nicht sicher festgestellte Ursache wahrscheinlicher, durch welche die Wirkung leichter erzielt werden konnte, als durch eine andere. Der Engländer Bayes hat sich zuerst mit der Aufgabe beschäftigt: „the number of times an unknown event has happened and failed being given to find the chance that the probability of its happening should lie somewhere between any two named degrees of probability", und seine Untersuchungen sind nach seinem Tode von Price in den Philosophical Transactions vom Jahre 1763 mit Begleitworten und Zusätzen publiziert. Laplace hat den ganzen Gedankengang des Engländers durch ein Prinzip gestützt, das die Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit voraussetzt und unser kurzes Beispiel in allgemeiner Fassung mitbehandelt. Dies Prinzip lautet in wörtlicher Übersetzung:

„Wenn ein Ereignis durch eine Anzahl von $n$ verschiedenen Ursachen hervorgebracht werden kann, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten dieser Ursachen, auf welche wir von dem Ereignis schliefsen (prises de l'événement), wie die Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses, sofern wir von den Ursachen auf dieses schliefsen (prises de ces causes)."

In die Formelsprache der Mathematik übersetzt giebt das die folgende Proportion:

$$P_\alpha : P_\beta : P_\gamma : \cdots : P_\nu = \tilde{\omega}_\alpha p_\alpha : \tilde{\omega}_\beta p_\beta : \tilde{\omega}_\gamma p_\gamma : \cdots : \tilde{\omega}_\nu p_\nu,$$

und hier bedeuten die Gröfsen:

$P_\nu$ die Wahrscheinlichkeit, dafs das Ereignis von der Ursache $\nu$ abzuleiten ist;

---

[1]) Auf dem Gedankeninhalt der Bayesschen Regel beruht die Scherzfrage: Was liegt unter dem Pflaumenbaume und ist blau? — Bekanntlich ein blauer Dragoner.

$\tilde{\omega}_\nu$ die Wahrscheinlichkeit, dafs die Ursache $\nu$ überhaupt wirkt;

$p_\nu$ die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses selbst, wenn die Ursache $\nu$ gewifs wäre.

Aus dem Prinzip oder der Proportion folgt innerhalb der Festsetzungen der Disziplin, da

$$P_\alpha + P_\beta + P_\gamma + \cdots + P_\nu = 1$$

sein mufs:

$$P_\nu = \frac{\tilde{\omega}_\nu\, p_\nu}{\tilde{\omega}_\alpha p_\alpha + \tilde{\omega}_\beta p_\beta + \tilde{\omega}_\gamma p_\gamma + \cdots + \tilde{\omega}_\nu p_\nu},$$

eine Bezeichnung, die in Worten lautet:

„Die Wahrscheinlichkeit für das Dasein einer bestimmten Ursache ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, welches ihm die Ursache geben würde (prise de cette cause), geteilt durch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten des Ereignisses, mit Rücksicht auf jede dieser Ursachen (prises de chacune de ces causes)."

In unserem Beispiel waren die Gröfsen:

$$\tilde{\omega}_\alpha = \tilde{\omega}_\beta = \tfrac{1}{2}$$

$$p_\alpha = \tfrac{3}{4} \qquad M_\alpha = \tilde{\omega}_\alpha p_\alpha = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4} = \tfrac{3}{8}$$

$$p_\beta = \tfrac{1}{5} \qquad M_\beta = \tilde{\omega}_\beta p_\beta = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5} = \tfrac{1}{10};$$

also:

$$P_\alpha = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{10}} = \tfrac{15}{19} \qquad P_\beta = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{8} + \frac{1}{10}} = \tfrac{4}{19},$$

und der Sinn dieser beiden Quotienten wird ergänzt durch die Aussage, welche aus demselben nach dem Bernoullischen Satze folgen würde.

Man nehme an, die beiden Urnen blieben aufgestellt, und es würde immer wieder von verschiedenen Personen nach freier Wahl so gezogen, dafs der Ziehende die Kugel in ihre Urne zurücklegt, dafs irgend Jemand ferner nur die weifsen Kugeln jedesmal registriert, so würden wir nach einer Ziehung von $m$ weifsen Kugeln auszusagen berechtigt sein, dafs sich die Zahl der weifsen, welche aus ($\alpha$) entnommen sind, zur Zahl aller anderen weifsen Kugeln höchst wahrscheinlich wie 15 : 4 verhalten wird.

Jene Regel für die Berechnung der Hypothesenwahrscheinlichkeiten führt den Namen des Bayes-Laplaceschen Satzes, und man sieht leicht ein, dafs sie zwar die Umkehrung der ursprünglichen Aufgabe bedeutet, aber keinerlei Erweiterung der ursprünglichen Festsetzungen nötig macht. Als Bedingungen verlangt sie lediglich, dafs

$$\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 + \tilde{\omega}_3 + \cdots + \tilde{\omega}_\nu = 1$$

sei, während an die Gröfsen $p_\nu$ keinerlei lediglich logische Anforderungen zu stellen sind; sie können Wahrscheinlichkeitsgröfsen sein, von welcher Art sie wollen. Sie sind die Daten in der Aufgabe, und von ihrer Zahl wiederum hängen die Gröfsen $\tilde{\omega}_\nu$ ab. Natürlich kann auch hier der Fall eintreten, dafs alle Gröfsen $p_\nu$ versteckt gegeben sind, d. h. dafs man sie erst erschliefsen mufs.

Alles, was sich auf diese Gröfsen $p_\nu$ bezieht, hat nun einen völlig realen Charakter zu tragen, wie diejenigen Voraussetzungen, die in zweiter Linie zu Bestimmungen der Gröfsen $\tilde{\omega}_\nu$ führen. Es genügt nicht, dafs alle individuellen Fälle, welche die Gröfsen $p_\nu$ symbolisch einschliefsen, gleichwahrscheinlich sind, sondern auch die Möglichkeiten, welche zur Wahl der Urne, wie wir kurz sagen wollen, führen, die dem Zug der Kugel die Wahrscheinlichkeit $p_\nu$ giebt, müssen in einer Weise gewährleistet sein, dafs wir die gleiche Wahrscheinlichkeit auch dieser Ursachen auszusagen vermögen. Nicht dafs die $\tilde{\omega}_\nu$ immer gleich sein müfsten; im Gegenteil, nehmen wir den Fall, dafs vier Urnen vor uns stehen, von denen drei ihrem Inhalt nach völlig gleich sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine Urne dieser Art zu treffen, von der vierten eben verschieden. Aber dafs eine der vier zutrifft, mufs als gleichwahrscheinlich gelten dürfen.

An diese Bayessche Regel, die für den zunächst behandelten Fall ein Beispiel für die Zusammensetzung von Wahrscheinlichkeiten ist, knüpfen sich Aufgaben, die um so eher eine besondere Besprechung rechtfertigen, als ihre mathematische Beurteilung sowohl als auch die allgemeinen Gedanken, mit denen sie in der Litteratur auftritt, durchaus schwankend sind.

Zunächst bleibt man nicht bei der Beurteilung der Urnen selbst stehen, sondern bezieht auch fernere Züge in die Rechnung, d. h. die Beurteilung, ein.

Es mag verstattet sein, von der Rechnung, die sich in den Lehrbüchern findet, abzusehen und nur das Resultat anzugeben. Angenommen, es seien nur zwei entgegengesetzte in den Rahmen unserer Voraussetzungen passende Ereignisse, $E_1$ und $E_2$, möglich, man habe $m$ mal $E_1$ und $n$ mal $E_2$ beobachtet, so berechnet man für die Wahrscheinlichkeit, dafs nunmehr wiederum $E_1$ eintrete, den Quotienten

$$\frac{m+1}{m+n+2}.$$

Nehmen wir den einfachsten Fall, indem wir wiederum an das Urnenbeispiel anknüpfen. Es sei bei völlig unbekanntem Mischungsverhältnis einmal gezogen und 1 $w$ Kugel das Resultat. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, im zweiten Zuge wieder $w$ zu treffen, $\frac{2}{3}$. Gegen dies Resultat — für einen speziellen Fall, — es ist da von Karten und nicht von Kugeln die Rede —, lehnt sich v. Kries auf, und Stumpf stimmt ihm bei. In Wirklichkeit ruht die Lösung auf der Annahme, dafs bei einer beliebigen Anzahl von $r$ Kugeln im Gefäfs die $r+1$ Ursachen möglich seien, die alle Mischungsverhältnisse aufzählen. In die Rechnung verwoben sind die Wahrscheinlichkeiten $\tilde{\omega}$ und $p$, und es ist dazu Stellung zu nehmen, welche Bedeutung jenem Quotienten beizumessen sein wird. Vorerst wollen wir aber der Lösung entgegentreten, welche Stumpf angegeben hat, indem er jenen Bruch $\frac{2}{3}$ durch die Wertung $\frac{1}{2}$ ersetzt.

Die auf Poisson zurückführende Aufgabe hatte Stumpf Veranlassung gegeben, wiederum auf die von ihm behauptete allgemeine Norm hinzuweisen, nach welcher den Mischungsverhältnissen a priori ungleiche Wahrscheinlichkeit zukomme. Es sollen die Binomialkoeffizienten die verschiedenen Wahrscheinlichkeiten regulieren. Wir haben wiederholt betont, dafs eine solche Feststellung nur auf der Basis objektiver Annahmen zu rechtfertigen ist. Weder a priori in zeitlicher noch in irgend einer Bedeutung, weder für Kugeln noch für Karten, weder für Erscheinungen von naturhistorischer noch physikalischer Qualität läfst sich die Behauptung mit einer Spur von Recht aussprechen. In der logischen Disjunktion ist ohne eine Veranlassung, die von der Erfahrung ausgeht, nur das begrifflich Unterscheidbare zu setzen; die Disziplin selbst giebt für die Wahrscheinlichkeit der Erfolge als Norm, dafs diese sich mit den Mischungsverhältnissen verändert, aber von der Permutation, aus der ein Urneninhalt hervorgegangen ist, ist diese Wahrscheinlichkeit selbst durchaus unabhängig, wenn nicht etwa die Kugeln gezwungen sind, in einer festen Anordnung zu erscheinen. Für diesen letzten Fall wird die Bayessche Regel völlig sinnlos. Man denke sich irgend eine verdeckte Zahl, die nur die Ziffern 1 und 2 enthalte, und es werde immer eine Ziffer gelüpft, wie soll man auf die folgenden Ziffern schliefsen? Ein solcher Schlufs wird nun von der Bayesschen Regel immer beabsichtigt, wenn es sich darum handelt, aus einem oder mehreren Ereignissen auf die Wahrscheinlichkeit eines folgenden zu schliefsen. Wenn zwei Karten auf dem Tische liegen, die entweder beide rot oder schwarz oder beide verschieden

sein können, so sagt STUMPF, nachdem eine schwarze gezogen wurde, seien von den vier Möglichkeiten

$$r\,r, \quad r\,s, \quad s\,r, \quad s\,s$$

nur noch zwei Möglichkeiten, die letzten beiden, übrig; also Wahrscheinlichkeit für ein weiteres Schwarz $\frac{1}{2}$. War denn hier der Umweg auch nötig? Die logische Theorie hätte es doch viel einfacher gehabt, zu sagen: Nun kann die nächste Karte nur das eine oder andere sein, also $\frac{1}{2}$. POISSON hatte, wie erwähnt, diese Wahrscheinlichkeit mit $\frac{2}{3}$ angegeben, eine Wertung, welche die herkömmliche ist. Wir geben zu, dafs ohne objektive Voraussetzungen das Beispiel den Anschein einer Vexieraufgabe erwecken kann; die Berufung auf den gesunden Menschenverstand mufs aber notwendig zu folgender Argumentation führen. Wenn schon ohne weiteres die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs eine Karte, die ich aufdecke, $r$ oder $s$ sei, $\frac{1}{2}$ ist, und wenn auch nach dem ersten Resultat $s$ wieder die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, welchen Sinn hat die Aufgabe überhaupt? Und wenn ich auf der andern Seite zu der Wertung $\frac{2}{3}$ komme, die nach STUMPF dem gesunden Menschenverstand zuwider ist, ist es dann möglich, diesem Resultat durch eine bestimmte, feste Annahme einen Sinn zu geben? Eine grofse Zahl von Mathematikern hat dies Resultat wiederholt, und trotz der allgemeineren Fassung der Auseinandersetzungen wird es wohl nicht unangemessen sein, hierher zu setzen, wie das „Problem" nach seinem Gedankeninhalte vor dem gesunden Menschenverstande LOTZES besteht:

„Wissen wir, in völliger Unkenntnis der bedingenden Gründe, nichts weiter, als dafs ein Ereignis $E$ unter bestimmten Umständen, z. B. in einem gewissen, ausgezeichneten Zeitpunkt $t$, einmal eingetreten ist, so kann es zunächst scheinen, als sei die Wahrscheinlichkeit, dafs es unter denselben Umständen [1]) ein zweites Mal eintreten werde, genau so grofs als die, dafs es nicht eintreten werde. Dennoch kann man so nicht rechnen, denn dann würde die beobachtete Thatsache seines einmaligen Eingetretenseins ohne allen Einflufs bleiben, und da dieselbe Betrachtung dann auch nach $m$maligen Vorgekommensein des Ereignisses gelten müfste, so würde man zuletzt selbst aus unendlich oft eingetretener Wiederholung desselben seinen nächstmaligen Wiedereintritt nicht wahrscheinlicher finden können, als wenn es sich noch niemals zugetragen hätte.

[1]) Vom Standpunkte der logischen Theorie, also bei gleicher Unkenntnis des Zusammenhangs.

Dies aber würde als offenbar widersinnig gelten können; denn jede neue Wiederholung des Ereignisses ist eine neu hinzukommende Assertion des Fortbestehens der unbekannten Ursachen, von denen es abhängt, und mithin auch eine Steigerung der Wahrscheinlichkeit seiner künftigen Wiederholung. Man mufs also schon in dem ersterwähnten Falle so schliefsen: Für den Eintritt sowohl wie für den Nichteintritt des $E$ ist an sich die Wahrscheinlichkeit gleichgrofs, aber für das Dasein der Ursachen, welche $E$ verwirklichen, spricht aufserdem noch der eine beobachtete Fall seiner Verwirklichung; für das Dasein von Ursachen, die $E$ hindern, spricht aufser der blofsen Möglichkeit nichts. Es sind mithin für den Wiedereintritt des $E$ zwei günstige Gründe gegen einen für die Nichtwiederkehr; da beide Wahrscheinlichkeiten sich mithin wie 2 : 1 verhalten, ihre Summe aber = 1 sein mufs, so ist die der Wiederkehr von $E = \frac{2}{3}$."

Diese Ausführungen werden wenig befriedigen; auch Lotze ist nicht ganz mit seiner eigenen Argumentation einverstanden, wie aus den sich unmittelbar anschliefsenden Worten hervorgehen dürfte:

„Allgemein also: wenn ein Ereignis $E$ oder ein gewisser Kreislauf $E$ gleicher Ereignisse $m$mal ohne Gegenbeispiel beobachtet worden ist, so ist die Wahrscheinlichkeit, dafs $E$ in derselben Weise wiederkehren wird, $\frac{m+1}{m+2}$ (Anm.: hier ist $n = o$); der Nenner enthält die Summe der denkbaren Fälle; denn nach $m$ wirklichen Fällen kommen immer zwei denkbare, Wiederholung und Nichtwiederholung des $E$, hinzu; der Zähler zeigt, wie immer, die Anzahl der günstigen Chancen an. *Ich überlasse dem Leser, ob diese einfache Ableitung der Formel ihm genügt; mir scheint sie nicht viel weniger überzeugend als die undurchsichtigere analytische Behandlung, durch die man sie gewöhnlich gewinnt.*"

Uns sagt die allgemeine Fassung der ganzen Darstellung nicht zu; der Schematismus der Disziplin ist ihr wesentlich vorzuziehen. Sie überzeugt nicht, weil erst die Berufung auf die vielmalige Wiederholung desselben Ereignisses für Lotze den Grund abgiebt, dem Widersinn einer dann um so auffallenderen Wertung $\frac{1}{2}$ aus dem Wege zu gehen, während doch bei der mathematischen Form der Aussagen, auch bei einer noch so kleinen Anzahl von Fällen, die Richtigkeit scharf und zwingend sich aufdrängen müfste.

Es läſst sich eben mit der Disjunktion nichts anfangen, wenn die Prädikate nicht zahlenmäſsig völlig bestimmte Einschränkungen enthalten. Lotzes Nachsatz, bei dem man an das Geschenk denkt, das er mit der Bezeichnung „Raumoide" der Raumtheorie macht, zeigt, wie unbehaglich er sich bei der Argumentation befunden hat. In Wirklichkeit setzt er sich, indem er die Alternative Wiederholung und Nichtwiederholung für die Rechnung als zwei gleichwahrscheinliche Fälle anerkennt, mit seinen früheren scharfen Bestimmungen über koordinierte Glieder in einen Widerspruch, den man sehr leicht auffinden wird. Es läſst sich mit „denkbaren Fällen" nicht rechnen, es sei denn, daſs man „unter der Annahme gleicher Wirklichkeit des gleich Möglichen" der Schulaufgabe die mathematische Bestimmung sichert, während im real gegebenen Falle diese „Wirklichkeit" der rechnungsmäſsigen Eventualitäten irgendwie objektiv nachgewiesen werden müſste. Wichtig ist uns das in Lotzes Darstellung implicite enthaltene Urteil des gesunden Menschenverstands, daſs man aus dem einmaligen Eintreten des einen von zwei kontradiktorischen Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeit vorher mit $\frac{1}{2}$ berechnet war, auf eine gröſsere Wahrscheinlichkeit der Wiederholung desselben Ereignisses und also auf eine geringere des entgegengesetzten schlieſsen muſs, wobei ergänzend hinzugefügt werden mag, daſs der Schluſs überhaupt sich als zulässig vorher auszuweisen hätte. Lotze sucht den Konsequenzen durch Hinweis auf eine groſse Zahl von Fällen auszuweichen, aber der gesunde Menschenverstand wird in dem Beispiele zweier Karten, deren Bildseite verborgen ist, nach Aufdeckung einer *s* Karte, sofern über deren Herkunft gar nichts gegeben ist, urteilen müssen: ich weiſs so wenig, ob die andere auch *s* ist, als ob sie rot ist. Weder die Wertung $\frac{1}{2}$ noch die $\frac{2}{3}$ hat die geringste Bedeutung, wenn nicht eine feste Voraussetzung über den Ursprung der Karten die Aufgabe bestimmt. Wie in dem Schluſs von dem Urneninhalt auf die bevorstehenden Ziehungen in den Quotienten die Konkurrenz unter den potentialiter vorhandenen Zügen zum Ausdruck kommt, und so von einer Wahrscheinlichkeit des Ereignisses — eben dieses bevorstehenden Geschehens — die Rede sein kann, so dürfen auch die Ursachen in der Rechnung nicht nach unserem nur logisch eingeschränkten Gutdünken berücksichtigt werden, sondern sie sollen in Wirklichkeit so zur Auswahl gestanden haben, wie die Zahlen sie ansetzen. Will Jemand ohne ein Datum raten oder wetten, so kann kein Zweifel darüber bestehen, daſs die Chancen völlig gleich sind,

denn für den Wettenden genügt, daſs der Gegenkontrahent ebenso wenig von der Karte weiſs, als er selbst. Wissen beide, daſs ursprünglich vier Paare Karten nach der STUMPFschen Aufstellung vorhanden gewesen sind, und ein Paar auf gutes Glück herausgegriffen ist, so sind die Chancen zu gewinnen und die Chancen für das Ereignis dieselben, und die Wette bleibt al pari. Wenn aber ursprünglich drei Kartenpaare vorhanden waren, so kommen nach dem Anblick der *s* Karte nur die beiden Kartenpaare

$$r\ s, \qquad s\ s$$

in Betracht. Nun hatte die *s* Karte die Wahrscheinlichkeit

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ bei der Kombination $r\ s$,

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ „ „ „ $s\ s$;

man sieht also, wofern die Gröſsendifferenzen in den Quotienten irgend einen Sinn für das Urteil haben sollen, daſs man es für wahrscheinlicher ansehen muſs, die Kombination *s s* getroffen zu haben. Diese beiden Quotienten geben zugleich auch das Verhältnis

$$\tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{2} = 1 : 2$$

eben der Wahrscheinlichkeiten, eine *r* oder noch eine *s* Karte vor sich zu haben, und da sie beide sich zur Einheit ergänzen müssen, so ergeben sich die Brüche $\frac{1}{3}$ für rot und $\frac{2}{3}$ für schwarz. Merkwürdigerweise findet STUMPF dies Resultat im Widerspruche auch mit seiner logischen Theorie, die ohne Datum genau so schlieſsen müſste. Dem gesunden Menschenverstand kann man beruhigt die Frage vorlegen: Hier sind 2 *s* oder 1 *r* 1 *s* Karte; 1 *s* wurde auf gut Glück gezogen. Was ist nun wahrscheinlicher: daſs man es mit den 2 *s* Karten oder der andern Kombination zu thun hatte? Die Antwort kann nur in einem Sinne ausfallen. Die logische Theorie bedarf keiner Angabe über den Ursprung; sie läſst sich an der Disjunktion genügen. Ich gestatte mir die Frage: Macht es logisch einen Unterschied, ob ich sage: Von zwei Karten ist eine rot, die andere schwarz, oder ob ich die Prädikate in anderer Folge setze? Ist die Permutation eine logische Operation, oder ist sie in der Anschauung gegründet? Möglich, daſs der Begriff der Logik einer Erweiterung bedarf, da kein Verstandesgebrauch ohne die Anschauung denkbar ist, aber wenn man die Formen des Denkens abstrahiert, so ist die Disjunktion:

*S* ist entweder *p* oder *P*

von der andern:

*S* ist entweder *P* oder *p*

nach ihrer äuſseren Form wohl, aber nach ihrer logischen Be-

deutung nicht zu unterscheiden; sie kann also, je nach der einen oder andern Fassung, unmöglich einen Unterschied in logischen Zusammenhängen bedingen, so wenig als arithmetisch die Summen $p + P$ oder $P + p$, wo sie im Urteil ein Element bilden, im Facit eine Differenz hervorrufen können. Mit dem gesunden Menschenverstand kann auch die Wertung $\frac{1}{2}$ nicht aussöhnen, und v. Kries beging eine Inkonsequenz, wenn er zu demselben Beispiele schrieb:

„Der unbefangene Leser wird, wie ich glaube, sagen, dafs die Karte ebensowohl rot wie schwarz sein könne, dafs also die Wahrscheinlichkeit beider Annahmen gleich, mit dem Werte $\frac{1}{2}$ anzusetzen sei.“ Wer nicht zugiebt, dafs man vor unbekanntem Mischungsverhältnis die Wertung $\frac{1}{2}$ für eine Kugel oder Karte gebrauchen darf, der ist nach dem Zug von einem Individuum in derselben Situation, in der er vorher war. Ich kann einen Unterschied nicht erblicken, nur dafs sich die Zahl der Individuen um eins verringert hat, und dafs ich dieses kenne. Anders liegt die Sache, wenn man berechtigt ist, vier Kombinationen vorauszusetzen, aus denen eine absichtslos genommen ist; so würde man nach Aufdeckung einer $s$ Karte sicher sein, eine der Kombinationen

$$r\,s, \qquad s\,r, \qquad s\,s$$

vor sich zu haben; hier kommt den beiden ersten Kombinationen die Wahrscheinlichkeit

$$\tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3},$$

der letzten die gleiche Gröfse $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}$ zu, so dafs man auch auf die gleiche Wahrscheinlichkeit der $s$ und $r$ Karte kommen mufs.

Giebt man den Übungsaufgaben der Lehrbücher nicht den Sinn, dafs sie sich ihre Voraussetzungen eigenmächtig stellen, wie mathematische Aufgaben anderer Natur auch, so imputiert man ihnen Fiktionen, mit welchen hinwiederum in schematischen Urteilen nur der Irrtum grofsgezogen werden kann. Die Fiktion wird erst erlaubt sein, wenn man mit der Wirklichkeit zu thun hat, und es ist ebenso banal als wichtig, dafs man dann auf der Höhe der Konsequenzen nicht vergifst, wie der Untergrund beschaffen ist. Wofern nun hier gelegentlich der Bayesschen Regel, die sicherlich an das Verständnis erhebliche Anforderungen stellt, Stumpf sich genötigt sah, eine Fiktion als Denknotwendigkeit zu erbieten, so ist ihm leider entgangen, dafs er für jenen einzigen Fall zwar eine Kongruenz mit dem „unbefangenen Verstand“, wie v. Kries sich ausdrückt, herstellt, dafs aber die unendliche Fülle anderer Aufgaben nicht blofs den „unbefangenen“, sondern auch

den gesunden, unterrichteten Verstand in Schwierigkeiten versetzt, wenn man seine Lösung nicht etwa zugiebt, sondern nur in ihr eine plausible Fiktion erblicken sollte. Wir wollen ihm vorerst selbst das Wort geben:

„Wird aus einer Urne, von der wir wissen, dafs sie 1 *w* 6 *s* Kugeln enthält, eine *w* gezogen, so finden wir keinen merklichen Anlafs zur Verwunderung. Wissen wir, dafs 1 *w* 100 *s* darin sind, so stiehlt sich vielleicht schon ein leiser Aufruf von den Lippen, und kommen gar auf 1 *w* eine Million *s*, so wird wenigstens der gewöhnliche Mann, wenn beim ersten und einzigen Zug *w* erscheint, kopfschüttelnd behaupten, dafs es nicht mit rechten Dingen zugehe."

Wir halten diesen Argwohn des gemeinen Mannes mit Stumpf für durchaus begründet, obwohl ja bei derartigen Kuriositäten des Zufalls immer auch zu berücksichtigen ist, was erwartet wurde. Wenn von 100 000 Spielern der *A* in Berlin das grofse Los gewinnt, so ist das dem *B* in Magdeburg völlig gleichgültig. Jedermann weifs auch, dafs es mit rechten Dingen zugegangen ist; nur *A* und seine Freunde sprechen von dem Zufall, der noch gröfser erscheint, wenn *A* zum erstenmal spielte und das Resultat mit Sicherheit vorher behauptet hatte. Eben dafs *A* gewinnen würde, war vorher sehr unwahrscheinlich, aber doch nicht mehr wie bei jedem andern auch. Gewifslich gewinnt jeder Einzelne das grofse Los mit minimaler Wahrscheinlichkeit, die richtig beurteilt ist, aber er gewinnt's doch, und es mufs so sein. Vielleicht ist kein Mensch auf Erden, der nicht bei näherer Überlegung einen oder mehrere Wendepunkte in seinem Schicksal auf den Zufall zurückzuführen vermöchte. Man könnte mit solchen merkwürdigen Zufällen Bände füllen, und doch würden sie nicht das im trivialen Geleise der Alltäglichkeit sich bewegende normale Geschehen aufwiegen, für dessen Niederschrift das Papier und die Tinte nicht ausreichen. Also ist unser Urteil über die Unwahrscheinlichkeit merkwürdiger Fälle durchaus gerechtfertigt, obzwar sie, wie schon aus der Existenz des Begriffs folgt, der kein rein apriorischer, sondern von der Wirklichkeit abstrahierter ist, sich thatsächlich ereignen.

Man nehme nun einmal an, man habe aus einer Urne eine Million weifser Kugeln gezogen und lege sich die Frage vor, wie wahrscheinlich es wohl sei, dafs die letzte noch vorhandene, die 1 000 001te Kugel *s* oder *w* sei, wenn die Voraussetzung gilt, dafs der Inhalt der Urne bis auf die Zahl und die beiden Möglichkeiten

*s* oder *w* vorher unbekannt war. Niemand wird behaupten, daſs diese Aufgabe irgendwie anders beschaffen sei, als für den einfachsten Fall, den wir besprochen haben.

Nach STUMPF würde hier gelten müssen, daſs die Kombinationen, welche noch eine *w* oder *s* Kugel zulassen, ungleich wahrscheinlich wären, daſs es demgemäſs gleichwahrscheinlich sei, als letzte Kugel *s* oder *w* zu treffen. So würde, wie ich überzeugt bin, Niemand urteilen. Die gewöhnliche Rechnung mit der von STUMPF beanstandeten Wertung

$$\frac{m+1}{m+2} = \frac{1\,000\,001}{1\,000\,002}$$

für den letzten Zug einer *w* Kugel dürfte doch dem gesunden Menschenverstand viel eher entsprechen; denn daſs die eine *s* Kugel an letzter Stelle erscheint, hat durchaus nach dem Urteile des gemeinen Verstandes und nach dem der Rechnung dieselbe Wahrscheinlichkeit, wie daſs sie ohne Obwalten unrechter Dinge an erster Stelle auftritt.

Wir bestreiten nun, ohne seine feste, in Voraussetzungen ruhende Basis, den einen Quotienten $\frac{1}{2}$ wie den andern. Der erste ist, wie auch STUMPF zugeben wird, dem gesunden Verstand zuwider, der letztere entspricht ihm zwar scheinbar, aber die Wertung in den Zahlen des Quotienten schwebt völlig in der Luft; sie bedeutet einen Miſsbrauch der Mathematik, sofern sie exakte Urteile vermitteln soll. Stammt die Urne aus einem Vorrat von Urnen, deren jede nur $10^6$ *w* und 1 *s* Kugel enthielt, so haben wir allerdings einen merkwürdigen Zufall vor uns, wie in dem anderen Falle, der der STUMPFschen Ansicht über die Mischungsverhältnisse entspricht. Im ersten Falle ist die Wahrscheinlichkeit für 1 *s* die Gewiſsheit $= 1$, im letzteren ist sie $= \frac{1}{2}$; kurz, hier liegt ein Paradoxon vor, das nur dadurch zu beheben ist, daſs jeder Quotient, der überhaupt aufgestellt werden darf, auch die objektiven Grundlagen zum Ausdruck bringen muſs. Dann hebt sich der Widersinn, auch wenn uns die Wirklichkeit desavouiert. Das Urteil war richtig, aber es war nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage.

Das scheint uns die Aufgabe der Erkenntniskritik: nicht das Kleid für den gesunden Menschenverstand seinen Urteilen anzumessen, sondern seine Urteile zu prüfen, zu korrigieren und ihm nicht ein Gewand, sondern einen Boden zu verschaffen, auf dem er einherschreiten kann.

Der Quotient

$$\frac{1\,000\,001}{1\,000\,002}$$

entsprach dem gesunden Verstand, aber ob er richtig war, ist eine ganz andere Frage. Wir wollen nicht Wahrscheinlichkeiten schätzen, sondern sie sollen gemessen werden. Wo auf Grund der üblichen Fiktion gleichwahrscheinlicher Mischungsverhältnisse sich plausible Quotienten einstellen, da bestreiten wir die Bedeutung der Zahlen, welche auftreten. Der gesunde Verstand ist gar nicht imstande, sein Urteil an den Zahlen mit ihren feinen Differenzierungen auch nur entfernt zu messen. Er reagiert nur auf grobe Unterschiede, wie sie uns jene Wertung $\frac{1}{2}$ zumutet.

Unsere bisherigen Beispiele bewegen sich durchaus innerhalb der Sphäre, an welche sich die Entwicklung des mathematischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs von dem ersten Ursprung der Disziplin knüpft. Die Aufgaben, die wir besprochen haben, machen selbst die Erwähnung eines allgemeinen Prinzips, nach welchem wir diejenige von zwei Ursachen für wahrscheinlicher halten, für welche wir einer Wirkung die gröfsere Wahrscheinlichkeit zusprechen, wenn sie gewifs wäre, nicht notwendig. Wohl aber beweist der nach diesem Satze entwickelte Quotient, sofern er mit dem auf andere Weise gewonnenen Resultat übereinstimmt, aufs neue die Zweckmäfsigkeit der ursprünglichen Festsetzungen. Nehmen wir an, man habe eine Anzahl von $n$ verschiedenen Urnen, aus welchen eine weifse Kugel hätte gezogen werden können, und es sei nun eine solche wirklich gezogen; war dann für irgend eine bestimmte Urne für diesen Erfolg die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{\alpha_\nu}{m} = p_\nu,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs sie im Spiele gewesen ist,

$$\frac{\alpha_\nu}{\sum\limits_1^n \alpha_\nu} = \frac{mp_\nu}{\sum\limits_1^n mp_\nu} = \frac{p_\nu}{\sum\limits_1^n p_\nu},$$

wo nur vorausgesetzt ist, dafs der Nenner aller Quotienten $p_\nu$ derselbe ist; eine Annahme, die in Gemäfsheit der ersten Festsetzungen nur von formal-arithmetischer Bedeutung ist. Wir haben es, obwohl wir den Anspruch erheben, dafs wirkliche Fälle gezählt werden, in den Resultaten nur mit Quotienten zu thun. Nennt man

den Bruch $\frac{p_\nu}{\sum\limits_1^n p_\nu}$ mit einem Zeichen $\tilde{\omega}_\nu$, so bedeutet dasselbe die Wahrscheinlichkeit, dafs eine weifse Kugel aus der Urne gezogen worden ist, in welcher das Verhältnis $a_\nu : m$ das der weifsen zur Zahl aller Kugeln angiebt. Will man nun irgend ein Ereignis beurteilen, das nach dem Zuge einer weifsen Kugel die Wahrscheinlichkeit $p'_1$, $p'_2$, $p'_\nu \cdots p'_n$ haben würde, je nach der Urne, welche in Frage ist, so wird man diese Gröfsen verschieden anzusetzen haben, je nachdem man die Kugel vorher wieder in die Urne gelegt hat oder nicht. Im ersten Falle stimmen sie ersichtlich mit den Gröfsen

$$\frac{\alpha_\nu}{m} = p_\nu$$

überein. Allgemein erhält man als Wahrscheinlichkeit $P$ eines auf den Zug einer weifsen Kugel folgenden Ereignisses nach den Regeln der Rechnung

$$P = \tilde{\omega}_1 p'_1 + \tilde{\omega}_2 p'_2 + \cdots + \tilde{\omega}_n p'_n = \sum_1^n \tilde{\omega}_\nu p'_\nu,$$

eine Formel, die mit den Resultaten aus dem BAYES-LAPLACEschen Satze völlig identisch ist.

Für das disjunktive Urteil, auf welches man jede mathematische Wahrscheinlichkeitsaussage reduzieren kann, hat dieser Satz, wie man leicht einsieht, nur mittelbar Bedeutung. Es knüpfen sich an die Aussage:

ein bestimmtes $S$ entstammt $P_1$ oder $P_2$ oder $P_3 \cdots$ oder $P_n$,

wiederum soviel mitverwertbare Bestimmungen:

$$P_\nu \text{ enthält } \alpha_\nu \times S_1,\ \beta_\nu \times S_2,\ \gamma_\nu \times S_3 \cdots\cdots \varrho_\nu \times S_\mu,$$

als Glieder $P$ vorhanden sind.

Zieht man alle hier möglichen Disjunktionen in eine zusammen, so erhält man das Urteil:

irgend ein $S$ ist entweder ein $S_1$ von $(\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n)\ S_1$
oder „ $S_2$ „ $(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n)\ S_2$
„ „ $S_3$ „ $(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)\ S_3$
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
„ „ $S_\mu$ „ $(\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n)\ S_\mu$

Wenn es sich in der That nur um logische Zusammenhänge handelte, so würde man z. B. die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs $S$ ein $S_1$ ist, auf Grund der logischen Theorie durch den Quotienten

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\alpha + \Sigma\beta + \Sigma\gamma + \cdots + \Sigma\varrho}$$

bestimmen müssen. Das will auch STUMPF nicht, der alle objektiven Daten anerkennen und nur die Entscheidung auf Grund der Disjunktion für den äufsersten Fall und daher auch im Interesse der Allgemeinheit des Begriffs sich reservieren will. Aber gerade die BAYESsche Regel bietet von neuem den Anlafs, gegen die Ansicht Front zu machen, als könne die Disjunktion allein den mathematischen Gang von Wahrscheinlichkeitsurteilen vorschreiben. Mit der Inkonsequenz, die darin liegt, in dem vorliegenden Falle, aufser der Disjunktion, welche die verschiedenen möglichen Mischungsverhältnisse indiziert, eine Reihe von anderen Annahmen zu machen, die reale Verhältnisse fingieren — die Fiktion liegt nicht allein in den Permutationen, mit welchen man hier aus logischen Gründen allein nicht rechnen darf, sondern schon die Zusammensetzung der Ereignisse bedingt objektiv nachweisbare Annahmen —, mit jener Inkonsequenz also wollen wir nicht rechten. Aber mit der BAYESschen Regel hebt auch in den allgemeinen Lehrbüchern der Disziplin eine Freiheit im Gebrauch der Möglichkeiten an, die vor der Kritik nicht standhält, und den Vorwurf der Willkür nicht unberechtigt erscheinen lässt. Es wird sich überhaupt fragen, ob sie imstande ist, die Brücke zur Wahrscheinlichkeit, welche man im Sinne der auf Erfahrungen ruhenden Bestimmungen a posteriori nennt, zu schlagen.

Schon oben haben wir ein paar Worte über die Terminologie, welche die beiden klassischen Bezeichnungen der Philosophie in den Dienst der Disziplin stellt, gesprochen. Diese erhebt den Anspruch auf das Prädikat „mathematisch“. Soweit sie das wirklich ist, sind ihre Operationen a priori im Sinne KANTS: „Mathematik und Physik sind die beiden theoretischen Erkenntnisse der Vernunft, welche ihre Objekte a priori bestimmen sollen, die ersteren ganz rein, dann aber auch nach Mafsgabe anderer Erkenntnisquellen als der Vernunft.“

Was die Disziplin an Daten gebraucht, ist allezeit von empirischem Charakter. Jedes Urteil aber, das sie fällt, ist apriorischen Ursprungs, denn weder in den Kugeln noch in den Würfeln liegt eine Nötigung, so zu entscheiden, wie wir es mit den Quotienten in der That beabsichtigen. Soll eine Parallele gezogen werden, so kann man mit der Physik vergleichen. Selbst der freie Fall ist der mathematischen Behandlung nur auf Grund empirischer Daten

zugänglich, aber hier ist noch ein wesentlicher Unterschied, der nicht übersehen werden darf. Wenn wir die Fallgesetze induktiv ableiten, so hat die Erfahrung, deren wir hierzu bedürfen, in der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst kein Analogon. Vielmehr entsprechen sich die Angaben, die wir etwa von dem frei fallenden Körper in Bezug auf die Fallhöhe verlangen, und die Daten des Wahrscheinlichkeitsansatzes. Stumpf hat recht, wenn er annimmt, dafs die Beurteilung der Daten nur auf logischem Unterbau beruht, aber damit können nur „transscendentale" Faktoren gemeint sein und nicht Bilder, Typen aus der formalen Logik, in welchen unsere Unkenntnis in absoluter, unabänderlicher Krystallisation erstarrt ist. Die empirischen Daten müssen zureichend sein, d. h. sie müssen die mathematische Behandlung gestatten durch das, was sie enthalten, nicht aber auf Grund von Eigentümlichkeiten, die sie nicht enthalten, und deren Mangel die Rechnung selbst zu einer inhaltslosen macht. Die Festsetzungen, welche getroffen sind, haben die Bedeutung einer sehr zweckmäfsigen Maxime unserer Vernunft, die vor der Prüfung der Kritik sich nicht als erkenntnistheoretische Notwendigkeit bewährt. Die ganze Disziplin, wo man ihr nahetritt, hat durchaus den Charakter eines Instruments, mit welchem der Erkenntnis Dienste geleistet werden auf Durchgangsstationen, die von der Unmöglichkeit eines sofortigen Übergangs aus dem Ungewissen in die Halle des Wissens aus praktischen Gründen bedingt sind. Jene Festsetzungen sind nur verbindlich für den, der sie anerkennt; dieser aber hat sich in ihrem Banne lediglich auf apriorischen Geleisen fortzubewegen. Die Notwendigkeit, mit welcher sich der Train in der künstlich hergestellten Bahn fortbewegt, ist nicht anders beschaffen als diejenige, welche den Weg des geworfenen oder fallenden Körpers völlig bestimmt. Der Eisenbahnzug kann entgleisen, wie der Stein von seinem Wege abgelenkt werden kann; das alteriert nicht den Zwang des a priori, mit dem wir die Gesetze der Physik sich erfüllen sehen. Die Rechnung der Wahrscheinlichkeiten bewegt sich in einem künstlichen Geleise, das wird Niemand bestreiten; aber wie der Bahnbau die Gesetze der Physik voraussetzt, so verlangt auch hier der Begriff des Wahrscheinlichen, dafs die Wege auf dem Boden des gesunden Verstandes und nicht in der Luft — mit Münchhausenschem Material — chaussiert werden. Der allgemeine Begriff der Wahrscheinlichkeit war einer mathematischen Behandlung unzugänglich; wir können logische Beziehungen nicht exakt wägen; wenn wir

unser Vertrauen durch einen Quotienten markieren wollen, so ist er ein Mittel, unsere Gedanken, gegenüber anderen, nach einer willkürlichen Schätzung zu präzisieren, aber mit solchen Quotienten können wir nicht weiter rechnen, und den Anspruch auf Würdigung als Bausteine einer exakten Disziplin können sie nicht erheben.

Sind die Urnenbeispiele wirklich typische Repräsentanten der Fragen, welche die Disziplin zu lösen hat, so kann es sich überall nur um Beurteilungen von Ereignissen handeln; das Faktum, welches nicht mehr zu ändern ist, unterliegt einem solchen Urteil, sofern wir über die Art seiner Entstehung eben die objektiven Voraussetzungen erfüllt sehen, welche den Quotienten auszulösen imstande sind. Ist es eingetreten, so kann ein minimaler Quotient die Aufgabe nahelegen, jene Voraussetzungen nochmals auf ihre Richtigkeit zu prüfen; allgemeine Untersuchungen darüber, bei welchem Quotienten wir dieselben mit einem absoluten Zweifel anzusehen haben, kann es aber nicht geben. Man müfste neue Bestimmungen vereinbaren, bei welcher Wahrscheinlichkeit man den Zweifel anheben lassen wollte; oder wir müfsten geradezu die Disziplin selbst wieder aufheben, welche die mit noch so geringer Wahrscheinlichkeit gewerteten Fälle in die Rechnung als mögliche miteinbezieht.

Überall also, wo die Disziplin eingreift, handelt es sich um die „Art eines Zustandekommens", niemals um rein logische Akte; es sei denn, dafs wir unsere Wahl selbst beurteilen, die es mit lauter nicht unterscheidbaren Prädikaten zu thun haben kann, und deren Entscheidung im idealen Falle eine Suspension aller verstandesmäfsigen Erwägungen bedeutet, so dafs man gut thut, mit Los und Würfel die Verantwortung von sich abzuwälzen oder mit Gretchen die Sternblume zu zupfen. Er liebt mich — liebt mich nicht — auch das ist eine gute Disjunktion.

In der Laplaceschen Definition wurden die Aussagen abhängig gemacht von dem „Wissen und dem Nichtwissen". Wie das Wissen beschaffen sein mufs, glauben wir gezeigt zu haben, und die ersten Beispiele der Disziplin dürften beweisen, dafs auch Laplace nicht an die Verallgemeinerung gedacht hat, welche eine individuelle Bedeutung der Disjunktionselemente nicht mehr verlangt, sondern sich mit allgemeinen Begriffen begnügt, wie sie das disjunktive Urteil in jeder Einteilung herzählt. Wenn er für das Kreuz- und Pfeilspiel auf die kleinen Unregelmäfsigkeiten hinweist (S. 185), welche den Wurf beeinflussen, obwohl man vorher eine vollkommene

Gleichheit der Chancen angenommen hat, so will er den Quotienten $\frac{1}{2}$ gewahrt wissen:

> „parce que dans l'ignorance où l'on est de la face que cette inégalité favorise; autant la probabilité de l'événement simple est augmentée, si cette inégalité lui est favorable, autant elle est diminuée, si cette inégalité lui est contraire“;

indessen hat er es mit einem Spiel zu thun, für das die Chancen gleich bleiben, sofern die Spieler gleichviel und gleichwenig wissen. Er leitet mit dem Beispiel über zu Untersuchungen, welche aus den Erfolgen auf die Wahrscheinlichkeit zu schliefsen lehren.

Es ist verwirrend, solche Untersuchungen an Beispiele anzuknüpfen, welche auch in der Beschaffenheit der Objekte mathematische (Gestalt) und ideale physikalische Voraussetzungen (z. B. Homogeneität) bedingen. Gleichwohl dienen sie, wie hier LAPLACE, vielen Schriftstellern zur Überleitung auf das Gebiet der Wahrscheinlichkeit a posteriori, deren empirischer Charakter da aufhört, wo die Quotienten der Disziplin auftreten. Man thut gut, wie wir wiederholen, die Bezeichnung a posteriori nur zeitlich aufzufassen und sich mit den Unvollkommenheiten, die ideale Annahmen und natürliche Qualitäten immer voneinander scheiden, nicht in der Theorie selbst aufzuhalten. Man kann einen Würfel nicht durch den Zufall prüfen; die Abweichungen, welche der Satz des BERNOULLI berechnet, sind nur wahrscheinliche, und es giebt kein Mittel, zu entscheiden, was auf Rechnung des Objekts und auf die des Zufalls kommt. Bei so thörichten Fälschern, wie sie der Abbé GALIANI an einem Repräsentanten kennen lernte, bedarf man des Rechenstifts nicht, und bei kleinen Differenzen giebt das Spiel keinen Aufschlufs. Man möge die Objekte selbst prüfen, wie jeder Beobachter sich erst durch eingehende Untersuchung der Zuverlässigkeit seiner Instrumente versichert.

Wir wollen annehmen, es sei uns ein Körper gegeben, von dem wir nur wissen, dafs er, geworfen, auf einer von zwei Flächen zur Ruhe kommen kann, welche mit den Zahlen 1 und 2 bezeichnet sein mögen. Ferner sei uns bekannt, dafs dieser Körper ohne irgend eine Absicht hergestellt worden ist, während thatsächlich die Möglichkeit vorlag, 1 und 2, d. h. einer jeden von beiden Seiten irgend eine Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 zu geben, und zwar einen jeden Quotienten nur auf eine einzige Weise. Wir fragen nach der Wahrscheinlichkeit, dafs im ersten Wurf eine 1 falle. Sie ist offenbar bei der völligen Symmetrie aller Möglich-

keiten = $\frac{1}{2}$. Eins wird man sofort einsehen, nämlich, daſs man mit diesem Quotienten nicht weiter rechnen kann, wenn nicht wieder eine neue Körperform vorliegt, und daſs man eine ungeheure Zahl von Versuchen machen müſste — immer aber eingeschränkt durch unsere Voraussetzungen —, um z. B. den Bernoullischen Satz anzuwenden. Will man für jenen Wert $\frac{1}{2}$ einen Nachweis, so giebt ihn die Grundlage der Bayesschen Regel. Nehmen wir vorübergehend an, daſs für die Wahrscheinlichkeit der Ursachen $n + 1$ gleichberechtigte Annahmen bei Einschluſs der Grenzen verstattet seien, so ergiebt sich für den Wurf einer 1 die Summe:

$$\frac{1}{n} \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} + \cdots + \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{n} = \frac{n(n+1)}{2 \cdot n^2} = \frac{1(1 + \frac{1}{n})}{2},$$

ein Wert, der für ein unendlich groſses $n$ gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert. Kein Zweifel, daſs unter entsprechenden Voraussetzungen auch für den beliebigen Sechsflächner sich der Wahrscheinlichkeitsquotient $\frac{1}{6}$ ergeben würde, aber ohne die objektiven Annahmen würden wir so wenig bei 24000 als bei Millionen von Würfeln zu erwarten berechtigt sein, daſs nahezu der sechste Teil mit der Seite 6 auf dem Boden liegt, wie Stumpf es lediglich auf Grund unserer Unkenntnis annimmt. Wie in unserem einfacheren Beispiele muſs auch bei den Würfeln die Möglichkeit abgeschnitten sein, daſs sich dieselben Würfelformen in unberechenbarer Weise wiederholen, daſs also für die Wahrscheinlichkeit der Ursachen wiederum verschiedene Werte zu setzen wären, ohne daſs man abermals von einer völligen Symmetrie der Möglichkeiten sich überzeugt hielte. Wir vermeiden gern, zumal in dieser Disziplin, von einer theoretischen Bedeutung im Gegensatz zur Praxis zu sprechen. Die Aufgaben, mit ihren schier unerfüllbaren Ansprüchen, ob sie in Wirklichkeit vorkommen können oder nicht, sind uns hier nur Mittel zum Zweck. Wir wollen ermitteln, welche Grundlagen für das Urteil zu fordern sind, damit man wisse, warum und was gerechnet wird. Die Schwerfälligkeit aller dieser Auseinandersetzungen geben wir zu; die Theorie der Möglichkeiten hat es viel leichter. Wenn man mit der Disjunktion zu stande gekommen ist, so fängt man an zu rechnen. Unser Beispiel, das einen stetigen Verlauf der Wahrscheinlichkeiten zwischen 0 und 1 setzt, läſst sich mit Hülfe der Analysis leicht weiter führen. Ist einmal 1 gefallen, so wird die Wahrscheinlichkeit für den nächsten gleichen Wurf $\frac{2}{3}$, und nachdem in $m + n$ Würfen $m \times 1$, $n \times 2$ gezählt wurde, gilt für die Wahrscheinlichkeit, daſs wieder 1 getroffen wird, obiger Quotient:

$$\frac{m+1}{m+n+2}.$$

Machen wir uns hingegen von den Voraussetzungen insoweit frei, dafs wir von zwei Ereignissen $E_1$ und $E_2$ nur wissen, dafs entweder das eine oder das andere notwendig eintreten mufs, dafs die Wahrscheinlichkeiten, welche die konstanten Bedingungen, eben die Ursachen, welche innerhalb des wechselnden Geschehens bestehen bleiben, den Ereignissen erteilen würden, sofern wir sie genau zu erkennen vermöchten, irgend einen Wert zwischen 0 und 1, die Grenzen mit eingeschlossen, haben könnten und einen bestimmten Wert also wirklich repräsentieren, so haben wir viel mehr vorausgesetzt, als gemeiniglich bei der Anwendung der Bayesschen Regel gegeben ist.

Man weifs meistens nicht sicher, dafs der Spielraum der Wahrscheinlichkeiten den ganzen Bezirk der echten Brüche mit seinen Grenzen wirklich abgiebt und kennt auch für ein engeres Intervall die Grenzen nicht; man weifs nicht, dafs konstante Bedingungen wirklich vorhanden sind, geschweige, dafs man die Gleichwahrscheinlichkeit derselben innerhalb der Möglichkeiten nur zu diskutieren sich bemühte.

Wenn nun auf Grund unserer letzten Voraussetzungen $E_1$ $m$mal eingetreten ist — sagen wir $m$ sei 100 —, so ist der berechnete Quotient

$$\tfrac{101}{102}$$

für die Wiederholung des $E_1$ sehr plausibel, wie auch nach einmaligem Konstatieren von $E_1$ an dem Bruche $\tfrac{2}{3}$ vom gesunden Menschenverstande nicht gemäkelt werden wird. Aber sollen wir uns nur durch die Thatsache blenden lassen, dafs der gesunde Verstand nicht opponiert? Mit nichten, die Konkordanz ist ja nur scheinbar. Man versehe den Verstand mit etwas mathematischer Anschauungsweise, so wird gefragt werden: Warum $\tfrac{101}{102}$ und nicht $\tfrac{999}{1000}$ oder sonst ein Bruch, der nahe der Einheit liegt? Weist die Zahlen im Zähler und Nenner nach, nicht dafs man sie für plausibel halte, sondern dafs man sie und keine anderen für notwendig halte.

Wer die Schätzung des gesunden Verstands als Kriterium von Urteilen in mathematischer Form gelten läfst, der würde der Mathematik in sehr vielen Fällen gar nicht mehr bedürfen. Dem Satze des Pythagoras wird auch beim Anblick der Figuren der gemeine Mann nicht widersprechen. Also wozu bedarf es des

exakten Beweises? Die erste Frage lautet also: Ist die Rechnung richtig, und welches sind die Elemente, die verwandt worden sind? Diese müssen objektiv nachweisbar sein, wenn man wirklich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses anzugeben hat; sie sind lediglich fiktiv, wenn wir uns auf die Disjunktion allein verlassen. Erst in zweiter Linie und mit Rücksicht darauf, daſs unsere Rechnung eine konventionell begründete ist, läſst sich die Frage stellen: wie verhält sich zu den Zahlen der gemeine Verstand? Man verfährt wie die Scholastik, welche zwischen Glauben und Wissen vermitteln will, aber von vornherein den Kirchenglauben mit dem Charakter absoluter Wahrheit voraussetzt, nach dem sich das Wissen zu richten hat, wenn man angesichts der groſsartigen Entwicklung der Disziplin sich des Rechts begiebt, von ihr zu verlangen, daſs sie ihre Zahlen nachweise. Haben wir ein Recht zu der Rechnung mit Einheiten, die nur in unserer Einbildung bestehen, so muſs auch dem Philosophen des Unbewuſsten gestattet sein, „mit der Wahrscheinlichkeit 0,9999999999 auf das Mitwirken geistiger Ursachen bei der Embryo-Entwicklung" zu schlieſsen, und wir verstehen nicht, warum Stumpf hier einen Fehlschluſs konstatiert, wenn er die Form des Schlusses korrekt findet (S. 38). Eben die Form der Argumentationen ist durch die Theorie der Denkmöglichkeiten immer gewährleistet; wir zweifeln auch daran nicht, daſs der gesunde Verstand Schwierigkeiten hat, bei plausiblen Zahlen die Einwände der Kritik zu würdigen.

Indem Stumpf sich bemühte, die Wertung $\frac{1}{2}$ für den Zug einer *w* Kugel bei unbekannter Mischung durch Rechnung zu retten, hat er sich dem gewöhnlichen Urteil gefällig erwiesen, das sagen wird: $\frac{1}{2}$ ist der indifferente Wert, der einem bestimmten Zustande des Denkens entspricht. Wie man auch hin- und herwägt, die Unentschiedenheit nach der einen und nach der andern Seite kann nicht aus dem Gleichgewicht gebracht werden. Daſs nun hier dieser Quotient $\frac{1}{2}$, sagen wir nach dem Zug von 100 *w* Kugeln, nicht mehr aufrecht erhalten werden kann, wenn noch eine Kugel oder auch wenn unendlich viele vorhanden sind, darf uns nicht dazu verleiten, den plausiblen Wert $\frac{101}{102}$ unter allen Umständen für richtig zu erklären. Unser Beispiel (S. 218) stimmt überein mit der Annahme so vieler gut gemischten Kugeln in einer Urne, daſs der Zug einer noch so groſsen Zahl die Wahrscheinlichkeit für den folgenden Zug nicht berührt. Die Bedingungen bleiben konstant, aber es ist uns nicht bekannt, wie die Verteilung der *s* und *w*

Kugeln in der Urne numerisch beschaffen ist, noch woher die Urne stammt. Wollen wir hier die Bayessche Regel anwenden, so rechnen wir mit allen Möglichkeiten der Verhältnisse zwischen 0 und 1, zwei Werten, die den Fall von lauter *s* und lauter *w* Kugeln symbolisieren. Zunächst ist völlig zuzugeben, dafs wir aus den Ziehungen einen Schlufs auf die Mischung, also auf die Wahrscheinlichkeit auch eines folgenden Zuges machen dürfen. Nur sehe ich keinen Grund, der uns berechtigte, Möglichkeiten, die wir nicht bestreiten, die aber nirgends garantiert sind, mit in die Rechnung einzubeziehen. Indem innerhalb dieser Betrachtungen die Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Urne zu treffen, und die, eine gewisse Kugel zu ziehen, zusammengesetzt werden, so verlangen wir auch sicher zu wissen, dafs uns der Zufall diese eine Urne als eine unter unendlich vielen in die Hände gebracht habe, oder dafs sie durch irgend eine Art der Füllung, für die alle Mischungsverhältnisse gleichwahrscheinlich gewesen sind, mit ihrem Inhalt versehen worden ist. Sollen wir aus den Resultaten auf die Mischung und von dieser, als einer wahrscheinlichen unter vielen möglichen, auf einen folgenden Zug in exakter Weise schliefsen, so mufs jede in der Rechnung erscheinende Mischung ebenso gesichert sein, wie z. B. beim Berechnen nach dem binomischen Satze für eine Anzahl von Ziehungen bei gegebenem Mischungsverhältnisse jede, auch die unwahrscheinlichste Aufeinanderfolge thatsächlich um deswillen in Rechnung gebracht werden konnte, weil sie auf Grund der realen Verhältnisse möglich war.

Es ist nichts als eine Subreption, wenn auf der „Basis" unserer Unkenntnis gesagt wird: Weil wir ganz und gar nichts über den Inhalt der Urne wissen, so kann mit gleichem Recht in derselben irgend eines der unendlich vielen Mischungsverhältnisse sein, wie wir es mit einer Erschleichung gegenüber der Behauptung zu thun hatten, dafs unter derselben Voraussetzung immer ebensowohl eine *w* als eine *s* Kugel die Stelle ausfüllen kann, nach welcher die Hand greift. Hier und dort wissen wir nichts von einer gleichen Wahrscheinlichkeit, wenn sie uns nicht durch hinreichende Voraussetzungen gegeben wurde. Welchen Sinn hat denn die gleiche Wahrscheinlichkeit, wenn nicht den, dafs sie eine gleiche Begründung aussagen will?

Sind diese Voraussetzungen erfüllt, so ändern sich allerdings die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse, von denen wir vorher die Wertung $\frac{1}{2}$ ausgesagt haben, nachdem wir ein oder mehrere

Resultate beobachtet haben. Kein Wunder, denn ein jedes ist ein neues Datum für die Rechenaufgabe, welche zur Lösung steht. Diese beständige Berichtigung früherer Zahlen oder auch die Bestätigung, welche möglicherweise eine ursprüngliche Wertung erfährt, darf aber nicht dazu verleiten, dem Mathematiker die Zumutung zu stellen, irgend einen völlig aus der Luft gegriffenen Quotienten anzusetzen und ihn an der Hand der Erfahrungen wieder zu beseitigen. Der verstorbene KUMMER pflegte in seinen Vorlesungen bei viel berechtigteren Manipulationen scherzend zu sagen: „Man lädt Niemanden ein, wenn man die Absicht hat, ihm dann die Thüre zu zeigen.“ Was den Kugeln in der Urne recht ist, mufs auch den Hypothesen, d. h. den Urnen, billig sein. Ist nur die Disjunktion gegeben, so fangen auch bei der logischen Theorie die Hypothesen an. Die Permutationen, die sie merkwürdigerweise für sich in Anspruch nimmt, sind aber niemals berechtigt, wenn ihnen Reales nicht entspricht, das permutabel ist, und wie sie einen Thatbestand fingieren, so liegt in der unmittelbaren Übersetzung der Disjunktion in ein Wahrscheinlichkeitsurteil, die Supposition, dafs man bei vollkommener Unkenntnis eine völlige Symmetrie der Objekte denken müfste, ein Zwang, der so wenig besteht, dafs man mit viel gröfserem Recht, trotz der absoluten Unbefangenheit, gerade diese zu leugnen aufgefordert wird.

Es ist hier nicht unsere Aufgabe, die Anwendungen der Disziplin einer Kritik zu unterwerfen. Mit der BAYESschen Regel sind indessen seit ihrer ersten Publikation dem menschlichen Verstande so merkwürdige Kalkulationen zugemutet worden, dafs wir nicht umhin können, mit ein paar Belegen uns zu befassen. Selbst bei LOTZE tummelt der selige Rittmeister sein Rofs, wenn wir dort nach LAPLACE vernehmen, dafs man 1826214 gegen 1 wetten könne, dafs auch morgen die Sonne auf- und untergehen werde, nachdem für 5000 Jahre der Wechsel von Tag und Nacht bezeugt ist[1]).

Diese Rechnung ist wohl zuerst 1763 von PRICE in den Philosophical Transactions, in welchen er nach dem Tode seines Freundes BAYES dessen Untersuchungen publizierte, aufgestellt worden. Der Nachsatz, welcher sich dort findet: „It should be carefully remenbered, that these deductions suppose a previous total ignorance

[1]) Ein Schriftsteller hält es für nötig, zu erklären, dafs auch ein verfinstertes (Sonnenfinsternis, Wolken) als ein Aufgehen der Sonne zu betrachten ist.

of nature", und die sonstigen Annahmen enthalten hinreichende Vorsichtsmafsregeln, welche den Kalkul vollständig wieder aufzuheben geeignet sind. Es läfst sich im Grunde nichts dagegen und nichts dafür sagen und würde einer Donquichoterie nicht unähnlich sehen, wenn man ernstlich darüber streiten wollte, was eine Person „just brought forth into this world" zuerst bemerken und ob nach dem Untergange der Sonne und ihrem Wiederaufgange die Erwartung nach einer zweiten Wiederkehr in ihm aufsteigen würde, und wie man sich etwa erklären soll, woher eine solche paradiesische Unschuld „might know that there was an odds of 3 to 1 for some probability of this".

Dem sei nun, wie ihm wolle, so findet sich doch schon in dem 1796 erschienenen und bereits citierten Aufsatze von Prevost und Lhuilier (S. 15) ein lebhafter Protest; es heifst da u. a.:

„La persuasion analogique qu'éprouve tout homme de voir se répéter un événement naturel (tel que le lever du soleil) est d'un genre différent de la persuasion representée par une fraction dans la théorie des probabilité", und es wird für nöthig gehalten, zu versichern, dafs ein Kind und ein Tier „ne forme aucun calcul explicite ni même implicite: il n'y a aucune dépendance nécessaire entre ces deux persuasions".

Diese Einsicht hindert freilich nicht, dafs wir in einem sich unmittelbar anschliefsenden Aufsatze derselben Verfasser (S. 35) der folgenden Aufgabe begegnen, welche zeigen soll, wie sich die Wahrscheinlichkeit an der Hand der Beobachtungen ändert:

„Posons que j'ignore absolument si une planète déterminée (Mars) contient, ou ne contient pas quelqu'espèce d'être organisé précisément pareille à quelqu'une de celles qui habitent notre globe. Feignons un observateur qui se transporte dans cette planète. Avant d'y réaliser son observation, il a la probabilité $\frac{1}{2}$ de rencontrer une telle espèce. Mais après en avoir rencontré une dès sa première observation, il n'est personne qui ne présume qu'il en rencontrera deux ou trois, avec quelque vraisemblance de plus."

Jackson, der jüngst in polaren Regionen eine ihm fremde menschliche Erscheinung, nämlich Nansen, sah, hatte doch wenigstens die Vorsicht, die Häupter seiner Genossen zu zählen. Der Marsbesucher, von dem wir fingieren, dafs er die beobachtete Species nicht mitgebracht hatte, würde mit demselben Recht, mit dem der Auf- und Niedergang der Sonne vorhergesehen wird, eine der unsren ähnliche Natur erwarten dürfen, wenn nicht seine organi-

sierten Wesen heimlich denselben Weg gegangen sind, den er selbst genommen hat.

Man sieht übrigens, dafs man mit solchen Anwendungen in die Domäne der Verstandespoesie gelangt, welche uns heutzutage mit Geschick und glücklicher Phantasie auf Grund geistreicher Prämissen in kommende Jahrtausende, auf ferne Weltkörper oder in die Ewigkeit versetzt.

---

# Der Bernoullische Satz und die Bayessche Regel.

Der Satz Bernoullis gab der ersten Aufgabe einen Abschlufs, welche auf Grund gegebener Voraussetzungen ein Geschehen zu beurteilen verlangt. Alle Vorgänge, auf die er Anwendung findet, haben das Merkmal, dafs sie sich in einer Sphäre so abspielen, dafs die Komponenten des Resultats uns zwar nicht im einzelnen bekannt sind, dafs aber die Physik der Veränderungen weder von Interesse noch von einem entscheidenden Einflufs auf den Erfolg sein kann, den zu beurteilen wir uns anschicken. Die mechanischen Prozesse beim Spiel haben nichts Rätselhaftes, und wo dies der Fall ist, können wir nicht mit unseren Quotienten ohne Fiktionen rechnen. Wir sehen von der Mechanik ab, weil wir ihrer sicher sind, aber wir verzichten nicht auf die Kausalität, weil sie es ist, die mit allen anderen transscendentalen Bedingungen der Erkenntnis unser Urteil erst möglich macht. Die Einzelprozesse werden für das Geschehen und für das Urteil ausgeschaltet, und die Elemente der Rechnung sind darum selbst Fälle, in denen schon alles enthalten ist, was sie konstituiert. Nur die Zahl dieser Fälle, die sich durch nichts unterscheiden, was das Geschehen selbst physikalisch modifizierte, und die begrifflich alle durch Abstraktion von einem oder mehreren Merkmalen zu vereinigen sind, kommt für das Urteil in Frage. In der Existenz der individuell vorhandenen Fälle liegt die gegenständliche Legitimation für unsere Quotienten, die zwar die Prevost-Lhuiliersche Fiktion nicht nötig haben, aber nur dann in unseren Rechenschematismus hineinpassen, wenn sich ihre numerischen Konstituenten, Zähler und Nenner, objektiv nachweisen lassen, und zwar als Bestimmungsstücke, welche vor der Rechnung vorhanden

waren, nicht durch Fiktionen, welche wir zum Ausfüllen brauchen, sofern die ungewogenen Disjunktionsglieder eine Kluft zwischen dem richtigen Urteil des gesunden Verstandes und der Bedeutung der Brüche aufthun. Allen unseren Wahrscheinlichkeitsaussagen geht die Notwendigkeit in dem Sinne ab, dafs eine Inkongruenz von Urteilsinhalt und Wirklichkeit zu einer Auflehnung des Verstandes führen müfste. Im Gegenteil, es wäre ein Widersinn, diese Urteile an dem Geschehen und nicht an den Prämissen zu messen, da sie doch nicht allein der Ungewifsheit entstammen, sondern sie auch als Schild in ihrem Namen tragen. Sie sind notwendige Urteile lediglich in dem Formalismus, den wir selbst schaffen; ihr Inhalt bezieht sich nicht auf den Zufall, dem die beurteilten Ereignisse überlassen sind; er ist also auch nicht in dem gegründet, was wir nicht, sondern in dem, was wir sicher wissen. Bis zu einem gewissen Grade zutreffend definiert Poisson: „Die Gesamtheit der Ursachen, welche vereinigt ein gewisses Ereignis hervorbringen, ohne ... auf das Verhältnis der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle zur Anzahl aller möglichen Fälle Einflufs zu haben, ist das, was man unter dem Zufalle verstehen mufs.“ Diese Ursachen sind uns ihrer Natur nach durchaus bekannt, ja wir schreiben ihnen auch den Wirkungskreis vor, in dem sie sich entfalten können; nur bieten wir alle Kunst auf, ihnen eine feste Richtung, eine Tendenz zu konstanter Wirkungsweise zu benehmen. Die Zahlen des Bernoullischen Satzes werden zwar durch diese Voraussetzung, welche den Zufall dekretiert, so dafs eine Unzahl von Ursachen nicht „eliminiert“, aber doch für das Resultat so geleitet wird, dafs keine dem letzteren einen bestimmten Charakter aufzuprägen vermag, zu einer Bedeutung erhoben, welche eben durch den Verzicht auf einschränkende Bestimmungen verstärkt wird, aber sie bleiben Wahrscheinlichkeiten, eben weil wir jener Kunst nicht sicher sind. Indem wir bei Gelegenheit jenes Satzes das Binom $(p+q)^{\mu}$ in seine einzelnen Glieder auswickelten, haben wir gesehen, dafs die extremen Fälle in der Rechnung selbst immer mehr an Gewicht einbüfsten, immerhin aber die festen Bestimmungsstücke und die Rechnung selbst erforderten, dafs sie mitgenommen werden. Die ganze Rechnung ruhte auf den wirklich gegebenen Möglichkeiten; die Daten der Rechnung sind absolut bestimmt, und die objektive Voraussetzung des Zufalls gewährleistet uns auch den guten Sinn grofser Wahrscheinlichkeiten für unser Urteil.

Es liegt nun die Aufgabe nahe und sie ist an früherem Orte schon erwähnt worden, dafs aus vielen Ziehungen, für welche die ursprünglichen Bedingungen völlig aufrecht erhalten werden, auch auf diese zurückgeschlossen werden soll. Implicite ist das in den Aufgaben des vorigen Abschnittes schon geschehen, und es ist hier nur die Frage, wie unsere Rechnung sich des direkten Problems bemächtigen kann.

Zum besseren Verständnis mag hier noch eine kurze Ergänzung der Betrachtungen eingefügt werden, die sich auf den BERNOULLIschen Satz beziehen. Ist $\mu$ die Zahl der Ziehungen aus einer Urne, in welcher die $w$ und $s$ Kugeln im Verhältnis der echten Brüche $p:q$ verteilt sind $(p+q=1)$, so leitet man in den Lehrbüchern als Wahrscheinlichkeit dafür, dafs die Zahl der $w$ und $s$ Kugeln $\mu p - h$ und $\mu q + h$ betragen, für den Fall, dafs $\frac{h}{\mu}$ sehr klein angenommen wird, den Näherungswert

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu p q \pi}} e^{-\frac{h^2}{2\mu p q}}$$

ab, in welchem $e$ die Basis der natürlichen Logarithmen und $\pi$ die aus der Lehre vom Kreise bekannte Gröfse bedeutet. Weiter fingiert man lediglich im Interesse der Rechnung, wobei die Gedanken der Disziplin völlig gewahrt bleiben, dafs die Abweichung $h$ vom wahrscheinlichsten Werte variabel zu denken sei, so dafs eine Abweichung, die zwischen $z$ und $z + dz$ liegt, die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu p q \pi}} e^{-\frac{z^2}{2\mu p q}} dz$$

erhält. Da nun bei $\mu$ Versuchen doch irgend eine Verteilung wirklich sich zeigen mufs, so erhalten wir durch Integration über alle nur möglichen Werte $z$ das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu p q \pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2\mu p q}} dz$$

dessen Wert, wie es auch bei exakter Rechnung sein müfste, in Übereinstimmung mit einem bekannten Resultat der Integralrechnung, der Einheit gleichzusetzen ist. Von Interesse ist nun wesentlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs der Ziehungserfolg sich zwischen zwei festen Grenzen halte.

Setzen wir für dieselben $-\alpha$ und $+\alpha$, so ändern sich nur die Grenzen des Integrals und indem wir in

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu pq\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-\frac{z^2}{2\mu pq}}\,dz$$

die Substitution

$$\frac{z}{\sqrt{2\mu pq}} = t$$

wirken lassen, ergiebt sich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}} e^{-t^2}\,dt = \Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right).$$

Diese Gröfsen, welche mit $\Theta(t)$ oder einer ähnlichen Funktionsbezeichnung in den Lehrbüchern auftreten, sind für alle bedeutungsvollen Werte von $t$ berechnet und in Form einer Tabelle ihnen beigegeben. Die Handhabung der letzteren ist überaus einfach und mit dem Aufschlagen von Logarithmen vergleichbar.

Jene Tabellenzahlen $\Theta\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu pq}}\right)$ oder $\Theta(t)$ ergeben nach dem Vorherigen die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs irgend eine innerhalb der Grenzen

$$\mu p \pm \alpha, \qquad \mu q \mp \alpha$$

liegende Verteilung bei $\mu$ Versuchen erreicht wird.

Ein einfaches Beispiel soll den Gebrauch veranschaulichen.

Aus einer Urne mit gleichviel $w$ und $s$ Kugeln sollen eine Million Ziehungen gemacht werden.

Vorausgesetzt ist entweder eine ungeheuer grofse Anzahl von Kugeln, oder es wird jede Kugel nach ihrem Erscheinen in die Urne zurückgelegt.

Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs sich der Erfolg in einer der Verteilungen innerhalb der Grenzen

$$500\,000 \pm 1000\,w, \qquad 500\,000 \mp 1000\,s$$

kundgiebt?

Hier ist

$$\mu = 10^6, \qquad \alpha = 10^3, \qquad p = q = \tfrac{1}{2},$$

so dafs

$$\Theta\left(\frac{10^3}{\sqrt{2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}}\right) = \Theta\left(\sqrt{2}\right) = \Theta\left(1{,}4\cdot\cdot\right)$$

aufzuschlagen ist. In den Tabellen steht bei $\Theta$ (1,4·) der Quotient 0,95, und das ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Die Bayessche Regel bringt, wie gezeigt, auch Ziehungsresultate mit in die Rechnung, und es ist eine sehr natürliche Frage, ob ein Schlufs auf die Verteilung der Kugeln in der Urne lediglich auf Grund sehr vieler Ziehungen die Formen der Rechnung benutzen kann.

Man wird sofort übersehen, dafs hier zwei Fälle möglich sind, die sich durchaus voneinander unterscheiden.

Unter allen Umständen geben sehr viele Versuche die Unterlage für eine Disjunktion aller möglichen Verteilungen, die das Resultat hätten hervorbringen können. Indessen wird unsere Beurteilung eine andere sein müssen, wenn bündig gesagt wird, woher die Urne stammt, welche Mischungen überhaupt vorhanden waren, und wenn darüber Angaben fehlen. Unsere Rechnung setzt immer den Zufall voraus, den sie mit ihren Zahlen zwar nicht erfassen kann, der aber eben durch diese in bestimmter Weise abgegrenzt werden soll. Ist das beim zweiten Falle in Bezug auf die gewählte Urne nicht möglich, so erschwert überdies der für die einzelne Ziehung geltende Zufall unser Urteil gegenüber der Wirklichkeit und ihren Aufgaben erheblich. Hier hat die Forschung fast immer Merkmale individueller Natur, welche auf den Ursprung oft mit Sicherheit schliefsen lassen. Ein Schreib- oder Druckfehler giebt der litterarischen Kritik zuweilen den gesuchten Aufschlufs, aber von vornherein wird sie doch völlig anders verfahren, wenn sie sicher weifs, dafs von irgend einer Schrift, deren Einflufs sie wahrscheinlich machen will, mehrere Exemplare vorhanden waren. Mufs sie deren einstmalige Existenz erst erschliefsen, so ist auch die Beurteilung eine völlig andere.

Wenn ein wirklich gegebener von einem anderen abweichender Sachverhalt ein anderes Urteil notwendig erheischt, so wird das für die feine Rechnung unserer Disziplin in demselben Sinne gelten müssen. Fälle, welche schon in der logischen Bearbeitung trennbar sind, werden, sofern sie der Berechnung überhaupt zugänglich sind, in den Ansätzen und Resultaten sich auch unterscheiden müssen.

Behandeln wir vorerst das Beispiel einer Urne, die aus einer

sehr grofsen Zahl mit allen verschiedenen Mischungen zufällig herausgegriffen ist.

Für die Rechnung werden stetige Verhältnisse fingiert, so dafs die unbekannte Gröfse $x$ der Wahrscheinlichkeit, eine $w$ Kugel zu ziehen, alle zwischen 0 und 1 existierenden Werte anzunehmen vermöchte. Diese Annahmen aus Gründen der Rechnung, wir wiederholen es, sind immer von fundamental anderer Bedeutung als jene, welche sich auf den Begriff der Wahrscheinlichkeit beziehen.

Indem wir diesen durch mathematische Einschränkungen für gewisse Fälle definieren, beschreiben wir, was mit ihm zugleich gedacht werden soll, und da die Einschränkung ihn nicht in das Gebiet der reinen Mathematik überzuführen vermag, so mufsten wir ihn durch eine „Exposition", wenn nicht als notwendig, so doch als zweckmäfsig und im Einklange mit dem Verstande erweisen. Von dem, was im Verlauf der Erörterungen als seine Bedingungen festgestellt wurde, darf nichts preisgegeben werden; das schliefst aber nicht aus, dafs Fiktionen von praktischer Bedeutung die Rechnung selbst verändern.

Man gestatte ein Gleichnis. Unsere Münzeinheit innerhalb der Währung ist ein bestimmt definiertes Quantum Goldes, die einzelne Mark aber, die wir in Händen haben, stellt eine praktische Fiktion dar, welche der Verkehr nötig macht. Die Währungsfrage selbst wird durch sie nicht berührt, solange von der Ausprägung der Scheidemünze nicht ein schrankenloser Gebrauch gemacht wird.

Ohne Not wird man auch in unserer Disziplin stetige Verhältnisse, wo sie nicht existieren können, auch nicht fingieren; indessen sind Skrupel über die Exaktheit der Rechnung im Gebiete der Wahrscheinlichkeit zu allerletzt angebracht.

Es seien nun aus jener Urne $m$ weifse und $n$ schwarze Kugeln gezogen, und wir fragen: Welche Gröfse $x$ werden wir als den wahrscheinlichsten Wert annehmen müssen? Nach der Regel von Bayes erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit einer jeden Gröfse $x$ einen Bruch, dessen Nenner immer derselbe ist, und dessen Zähler eben die Wahrscheinlichkeit angiebt, das Resultat zu erreichen, wenn $x$ nicht gesucht, sondern bekannt wäre.

Der gröfste Wert von $x$, welcher unserer Fragestellung genügt, ist also nur vom Zähler abhängig, und ihm würde der Ausdruck

$$\frac{(m+n)!}{m!\,n!}\,x^m(1-x)^n$$

entsprechen, dessen erster Faktor die Zahl aller möglichen Aufeinanderfolgen angiebt, in welchen $m\,w$ und $n\,s$ Kugeln erscheinen können.

Das Produkt ist ein Glied in der binomischen Entwicklung $\left(x+(1-x)\right)^{m+n}$, deren gröfstes Glied nach BERNOULLI Exponenten hat, die sich wie $x:(1-x)$ verhalten. Es liegt also die Frage nahe, ob auch umgekehrt, wenn die Proportion

$$x:(1-x)=m:n$$

besteht, $x^m(1-x)^n$ zu einem Maximum wird. In der That lehrt das aber die Differentiation dieses Ausdrucks, wofern man nach den einfachen Regeln den Differentialquotienten

$$mx^{m-1}(1-x)^n-nx^m(1-x)^{n-1}=0$$

setzt und nach Division mit $x^{m-1}(1-x)^{n-1}$ die Gleichung

$$\frac{1-x}{n}=\frac{x}{m}$$

beachtet.

Die Rechnung ergiebt also, dafs die wahrscheinlichste Verteilung in der Urne dem Verhältnis der erhaltenen Ziehungen entsprechen müsse. Es würde einige Schwierigkeiten haben, aus diesem mathematischen Resultat die Bestimmungen der Definition wieder herauszudestillieren, indessen kann man sich mit der Frage begnügen, was es wohl beweise. Und da wäre es ebenso absurd, zu behaupten, dafs durch das BERNOULLIsche Theorem der Beweis für das erbracht wird, was man gewöhnlich von ihm aussagen läfst, wie dafs hier die mathematische Nötigung erzwungen wird, aus unserem Ziehungsresultat auf die wahrscheinlichste Verteilung in der Urne zu schliefsen. Beide Theoreme hängen innig zusammen, und beide beweisen nichts weiter, als dafs unsere Grundbestimmungen vernünftig waren und also nicht zu Unträglichkeiten in den Konsequenzen führen konnten. Beide Sätze haben nur Sinn innerhalb unserer Voraussetzungen, sie behalten denselben, ob die Zahl der Ziehungen $m$ und $n$ grofs ist oder nicht, und man geht in beiden Fällen zu grofsen Zahlen nur über, um sich die Anwendbarkeit der Betrachtungen zu sichern. Wenn oben berechnet wurde, dafs bei einer Million von Ziehungen die Wahrscheinlichkeit 0,95 betrage, dafs die Abweichung von der gleichen Verteilung der Fälle sich innerhalb der

Grenzen $\pm 1000$ halten werde, so ist die Zahl 0.95 eine rationelle Messung an durchaus objektiven Rechnungselementen, die ohne unsere Annahmen zusammenfallen und ohne die Rechnung durch eine vage Schätzung würden ersetzt werden müssen. Aus kleinen Zahlen, $m$ und $n$, kann man Quotienten gewinnen, die ihre gutfundierte Bedeutung haben, aber anfangen kann man mit denselben gar nichts, wenn man nicht etwa zu wetten Lust hat oder sehr viele Fälle unter denselben Bedingungen prüfen will.

Wir haben nicht blofs ein Recht, sondern die logische Nötigung, die Resultate nicht als lediglich mathematische, formale Sätze anzusehen, vielmehr sie mit Rücksicht auf die verwendeten Rechnungselemente zu interpretieren, aber diese Interpretation darf der Mathematik nicht auf Kosten des gemeinen Verstandes Verdienste beimessen, die sie entbehren kann, und auf welche sie keinen Anspruch erheben wird. Aus einer Urne sind unter unseren Voraussetzungen 100 $w$ Kugeln gezogen worden. Alle Hypothesen über deren Inhalt sind gleichwahrscheinlich, und der wahrscheinlichste Fall ist der, welcher die Potenz $x^{100}$ zu einem Maximum macht. Da $x$ jeden Wert von 0 bis 1 annehmen kann, so mufs $x = 1$ sein. Ist das ein mathematischer Beweis dafür, dafs wir als wahrscheinlichsten Inhalt lauter $w$ Kugeln annehmen müssen?

Bernoulli meinte dem alltäglichen Gedanken eine wissenschaftliche Stütze zu geben, und Poisson war fest überzeugt, das „allgemeine Gesetz der grofsen Zahlen" direkt bewiesen zu haben; die Schlüsse des gemeinen Verstandes würden ohne die Hülfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung Gefahr laufen, als notwendige erkannt zu werden. Doppelt genäht hält besser, aber wenn man nur einen einzigen Faden hat, so geht das gar nicht. Glücklicherweise ist dieser aber fest genug. Und die Beurteilung der Disziplin hat gerade umgekehrt die Maxime zu befolgen, bei jedem neuen Schritt zu untersuchen, ob nicht der Boden des gesunden Verstandes verlassen wird. Die richtig interpretierten Resultate unterliegen der Kritik des gesunden Verstandes; die Mathematik aber ist nicht das Forum, vor dem sich der Verstand auszuweisen hätte. Sie ist kompetent und autonom im Gebiete der Anschauung, und da Mathematik nur ein Teil und nicht das Ganze ist, so werden wir ihren Formeln einen Inhalt geben müssen, wenn sie eine mehr als mathematische Bedeutung haben sollen. Man vergleiche mit der Maximumbestimmung für die wahrscheinlichste Mischung ihren mathematischen Inhalt. Dafs die Gröfse

$$\binom{\mu}{x} p^x (1-p)^{\mu-x}$$

ein Maximum wird für $x = \mu p$, dafs ebenso

$$\binom{\mu}{m} x^m (1-x)^{\mu-m}$$

am gröfsten wird, wenn die Proportion

$$x : (1-x) = m : (\mu - m)$$

besteht, das entscheidet die Mathematik mit dem absoluten Zwange, welcher ihren Schlüssen eigen ist. Entschiede sie anders, dann würden wir den ersten Schritt auf mathematisches Gebiet, den unsere Festsetzungen bedeuten, zurücknehmen müssen, aber unser Urteil über die wahrscheinlichste Verteilung in den Ziehungen und in der Urne würde bestehen bleiben. Das Rechteck im Kreise vom gröfsten Umfang und Inhalt wird ein Quadrat sein. So werden wir mutmafsen, aber davon überzeugen kann uns nur der Beweis. In einem solchen Falle könnte die Mathematik denkbarerweise unsere vorgefafste Ansicht ad absurdum führen; überall aber, wo wir den Inhalt ihr zuführen, ist es die Beurteilung der Wirklichkeit im gemeinen Verstande, welche entscheidet.

Jener Maximalwert

$$\binom{m+n}{m} x^m (1-x)^n$$

ist nun nicht etwa die Wahrscheinlichkeit der wahrscheinlichsten Verteilung, sondern er bedeutet nur einen Proportionalitätsfaktor. In die Rechnung verwoben werden die Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Verteilungen in der Urne. Man wird nun aus den Lehrbüchern entnehmen, wie man auch wohl ohne weiteres einsehen kann, dafs analoge Betrachtungen, wie sie der Bernoullische Satz mit sich brachte, auch hier bei der Umkehrung der Aufgabe Platz greifen. In den Formeln kehren dieselben Ausdrücke wieder, deren Deutung nur eine entsprechend andere werden wird. Nach $\mu$ Ziehungen wird man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dafs die Mischung der Urne zwischen zwei Grenzen eingeschlossen ist, und indem man diese hinreichend weit macht, wird man auch einen grofsen Wahrscheinlichkeitsquotienten erhalten, wie man auch durch Vergröfserung von $\mu$, der Zahl der Ziehungen, die Sicherheit der Schlüsse auf den Inhalt der Urne erhöhen kann. Alles das interessiert uns hier nur, soweit das logische Gewebe blofszulegen ist; wir halten uns bei der sehr einfachen Technik der Operationen nicht auf, die sich mit Näherungen begnügt und dabei

immer die sehr grofse Zahl der Versuche als Bedingung auszusprechen genötigt ist.

Wir betrachten die Bayessche Regel für eine grofse Zahl von Versuchen und mit ihrem Wahrscheinlichkeitsurteil über den Urneninhalt als den Schlufsstein des Baues, der auf Grund der verwendeten Denkelemente ein völlig festes Gefüge bildet.

Lassen wir nun einmal unsere Annahmen über den Ursprung der Urne fallen. Sie ist vorhanden, und ihr sind in $\mu$ Ziehungen $m\ w$ und $n\ s$ Kugeln entnommen. Wie beurteilen wir die Mischung, wenn jede Kugel immer wieder zurückgelegt worden ist? Dafs nunmehr die Aufgabe einer Bestimmung entbehrt, welche vorher die Gleichwahrscheinlichkeit aller der Werte $x$ zwischen 0 und 1 durch einen objektiven Thatbestand sichert, wird Niemand in Abrede stellen. Verglichen mit der gewöhnlichen Urnenaufgabe, die aus einer gegebenen Verteilung auf die Ziehungen einfach mit ihren Quotienten schliefst, existiert ferner ein nicht unwesentlicher Unterschied. Hier ist das Gegebene ein eindeutig bestimmter, völlig fester Thatbestand, die Quotienten sind feste Zahlen, die eine Richtschnur für unser Urteil abgeben, mit Rücksicht auf den Zufall, den wir im Geschehen voraussetzen, aber sie selbst sind von diesem Geschehen völlig unberührt. Dies Verhalten kann ich modeln; ich bin jeden Augenblick in der Lage, die Urne zu öffnen, hineinzublicken und jede Ziehung, mit der ich im Bernoullischen Satze rechne, wirklich herzustellen. Der Urneninhalt in unserem Falle aber ist eine konstante Gröfse, die auch vor der Darreichung nach Umständen einfür allemal feststehen konnte. In den Daten der $\mu$ Ziehungen, $m\ w$ und $n\ s$, liegt auch gar nichts, was eine Variabilität der Ursache rechtfertigte, als eben derselbe Zufall, welcher bei einer ganzen Anzahl, sagen wir wirklich bei allen möglichen Mischungen, dasselbe Resultat hätte herbeiführen können. In der That mufs ich sagen: möglich waren sie alle; man braucht nichts von den Erkenntnisprinzipien zu opfern, um das zuzugeben. Hiefse in unserer Disziplin wahrscheinlich das, was als wahr erscheint, so wäre auch gleichwahrscheinlich das, was ich nur in gleicher Weise nicht voneinander scheiden kann. Dann hätte die logische Theorie recht, und wir müfsten uns damit begnügen, der Disziplin als Motto vorzusetzen: Der Schein trügt, also auch der Schein der Gleichheit.

Wie kommen wir dazu, dem Zufall noch die Thüre für alle seine Kapriolen offen zu lassen, wenn wir uns erst so sehr bemühen, durch Vergröfserung der Versuchszahl ihn von unserem Urteil fern

zu halten? In jenen Daten der Gleichwahrscheinlichkeit, welche die Disziplin vorschreibt, lag eine Nötigung objektiver Natur; der Zwang der Mathematik, die Exaktheit der Rechnung, das typische Urnenbeispiel, die Wirklichkeit der Fälle, die nicht nur durch unser Denken, sondern in natura vorhanden war, kurz, die Bestimmung innerhalb des im einzelnen Unbestimmbaren nötigte, so scharf zu rechnen, dafs wir auch das noch so Unwahrscheinliche mit einem Quotienten ansetzen mufsten, um es den Zahlen zu überlassen, es auf seinen faktischen Unwert zurückzuführen. Aber hier, wo wir sicher wissen, dafs nur ein einziger Fall wirklich ist, oder wo wir nicht wissen, welcher von unbestimmt vielen, unbestimmt verschiedenen uns vorliegt, „wer heifst uns da rätseln“: a priori waren alle gleichwahrscheinlich; also flugs wird auch mit gleichen Elementen gerechnet? A priori; wir müssen so denken, aber was entspricht unseren Gedanken in der Wirklichkeit? Mit demselben Recht des a priori behauptet man eine Unzahl von Möglichkeiten, die die Rechnung total verändert haben würden. Kein a priori aber zwingt mich, als am wahrscheinlichsten anzunehmen oder nur als wahrscheinlich, dafs die völlige Symmetrie vorher bei der Auswahl der Urne unter anderen obgewaltet hat. Beruft man sich hier auf die Redeweise des gemeinen Verstandes, dem das Gleichunbekannte gleich gut und gleich schlecht ist, so haben wir allerdings ein Recht, auf die Mathematik zu verweisen, der 0 nicht immer $= 0$ ist und $\infty$ nicht immer $= \infty$. Wir freuen uns noch in der Erinnerung des feinen Lächelns, mit welchem der hochverehrte Kummer uns an die Tafel schrieb, dafs

$$\frac{0}{0} = 13$$

sei. Wenn wir von verschiedenen Disjunktionsgliedern gar nichts wissen, so dürfen wir auch nicht mit ihnen rechnen. Wenn sich die Gröfse $n$ der Null nähert, so ist auch der Grenzwert von $\frac{13\,n}{n} = 13$; daran ist nichts zu deuteln. Wenn wir aber nicht wissen, welche Mischung in der Urne war, woher sie gekommen ist, so sind die Möglichkeiten, die a priori d. h. mit Notwendigkeit als verschiedene aufzuzählen sind, unserem Verstande entsprungen, der sich dabei allerdings dem in der reinen Anschauung gegebenen Ordnungszwange zu fügen hat, mit welchen zwischen 0 und 1 jeder echt gebrochene Wert zu denken ist, ebenso wie bei gegebener Anzahl $n$ der Kugeln in der Urne die Zahl und ihr Wesen die bekannten $n + 1$ Verteilungen anzusetzen nötigt. Aber mit derselben Pflicht, die den

Mathematiker verbindet, den Quotienten $\frac{0}{0}$ als eine unbestimmte Gröſse zu bezeichnen, hat die Erkenntniskritik darauf hinzuweisen, daſs hier der logische Schein der Gleichheit nicht zu einer mathematischen Gleichsetzung verleiten dürfe. Dieser Schein wird noch durch ein anderes Moment, das in unserer Art zu urteilen und einer gewissen Kongruenz der Rechnungsresultate liegt, verstärkt. Je gröſser die Zahl der Ziehungen ist, um so mehr konvergiert das Rechnungsresultat gegen das Urteil des gesunden Verstandes, welches nur an eine sehr geringe Abweichung des Urneninhalts von dem Ziehungsverhältnisse $m:n$ glauben wird. Und nunmehr verleitet der Schein plausibler Resultate zu dem Irrtum, daſs die Rechnung doch wohl, wenn auch nicht auf notwendigen Gedanken, so doch auf annehmbaren Maximen beruhen werde. Die Bayessche Regel bleibt aber nur dann in dem Rahmen der Disziplin, wenn sie wirklich die Daten für zusammengesetzte Wahrscheinlichkeiten zu bearbeiten hat; ist das nicht der Fall, so dürfen wir sie auch nicht anwenden. Wollen wir bloſs schätzen, aber nicht messen, so haben wir uns an dieser Stelle nicht mit der Frage der Anwendbarkeit zu befassen. Ein- für allemal wird auszusprechen sein, daſs die Disziplin ein Mittel abgiebt, den Grad unserer Überzeugung, die psychische Resultante aller Momente, die unser Urteil dirigieren, ebensowohl wie bei objektiv veranlagten Menschen vielleicht das Produkt verstandesmäſsiger Erwägungen in rohen Quotienten anderen verständlich zu machen; doch wäre es schon gewagt, in Zehnteln zu markieren, während jeder gröſsere Nenner die pure Selbsttäuschung bedeutet. Mit solchen Angaben hat die objektiv begründete Zahlenangabe nicht das mindeste zu schaffen; wohl aber kann die scharfe Auffassung unserer Rechnungsgrundlagen das vage Urteil der Schätzung disziplinieren.

Die Schwierigkeiten, welche uns die Bayessche Regel bereitet, fallen nun gänzlich fort, wenn wir die nackte Disjunktion in Verbindung mit der Prämisse völligen Nichtwissens als Fundament der Rechnung anerkennen. Ob wir uns mit Rücksicht auf die schrankenlose Allgemeinheit und Eleganz dieser Lehre ihr ergeben müssen? Man gestatte die Analyse des folgenden Beispiels, das wohl den Anspruch eines klassischen erheben darf. Die moderne Statistik erkennt es nicht mehr an, obwohl sich analoge „Untersuchungen" noch bis in die neueste Zeit mit Leichtigkeit nachweisen lassen; indessen kommt hier nur die logische „Funktion der Urteilsmaterie" in Frage, die wir mathematische Wahrscheinlichkeit zu nennen uns

entschliefsen sollen. In A. MEYERS berühmten „Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung“ heifst es gelegentlich des BAYES-LAPLACEschen Satzes (S. 169): „Bei der Mehrzahl einfacher Ereignisse ist die Wahrscheinlichkeit unbekannt und erscheint aller Werte zwischen 0 und 1 gleich fähig.“

Unter den Anwendungen des Theorems liest man ferner (S. 184): „Es sei beobachtet worden, dafs von einer sehr grofsen Anzahl $p+q$ von Geburtsfällen $p$ auf Knaben- und $q$ auf Mädchengeburten entfallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $P$ sind unter $m+n$ künftigen Geburten $m$ Knaben und $n$ Mädchen zu erwarten?“

Lösung: Bezeichnet $x$ die unbekannte Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt, folglich $1-x$ die einer Mädchengeburt, so gilt für die Wahrscheinlichkeit des beobachteten Erfolges: unter $p+q$ Geburten $p$ Knaben und $q$ Mädchen — der Ausdruck

$$\tilde{\omega} = \frac{(p+q)!}{p!\,q!} x^p (1-x)^q$$

der erwartete künftige Erfolg: unter $m+n$ Geburten $m$ Knaben und $n$ Mädchen — hat mit Zugrundelegung derselben Ursache die Wahrscheinlichkeit

$$\tilde{\omega}' = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} x^m (1-x)^n$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist daher

$$P = \frac{\int_0^1 \tilde{\omega}\,\tilde{\omega}'\,dx}{\int_0^1 \tilde{\omega}\,dx} = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{\int_0^1 x^{p+m}(1-x)^{q+n}\,dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q\,dx}$$

Die Auswertung der Integrale, die Näherungsformeln für Fakultäten und eine kleine andere Annäherung ergiebt

$$P = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{(q+n)^{q+n+\frac{1}{2}} (p+m)^{p+m+\frac{1}{2}} (p+q)^{p+q+\frac{3}{2}}}{q^{q+\frac{1}{2}} p^{p+\frac{1}{2}} (p+q+m+n)^{p+q+m+n+\frac{3}{2}}}$$

während in einer Anmerkung trotz der Voraussetzung „einer sehr grofsen Anzahl $p+q$“ nochmals der Fall „Sind $p$ und $q$ sehr grofs“, doch wohl als etwas wiederum Besonderes, vorausgesetzt und durch wiederholte Annäherungen das Resultat

$$P = \frac{(m+n)!}{m!\,n!} \frac{p^m \cdot q^n}{(p+q)^{m+n}}$$

gewonnen wird. Daran schliefsen sich noch folgende Bemerkungen:

„Dies ist aber genau jener Ausdruck, welcher sich für die Wahrscheinlichkeit des erwarteten Erfolgs ergeben würde, wenn $\frac{p}{p+q}$ die Wahrscheinlichkeit einer Knaben- und $\frac{q}{p+q}$ die Wahrscheinlichkeit einer Mädchengeburt wäre.

Es ist daher natürlich zu schliefsen, dafs die Wahrscheinlichkeiten dieser einfachen Ereignisse annähernd im Verhältnisse $p$ zu $q$ zu einander stehen, wenn $p$ und $q$ grofse Zahlen sind, dafs also die Wahrscheinlichkeit einer Knabengeburt näherungsweise gleich ist $\frac{p}{p+q}$."

Wer hat nicht schon einmal wie eine Erlösung empfunden, wenn sich das Dunkel lichtete, und der Ausgang des Tunnels erreicht war! Er war für die ausgestandene Pein eine Strecke seinem Ziele näher; hier werden uns aber die Augen verbunden, und wir kommen genau wieder da an, wo wir ausgegangen sind. Eine verblüffende Kalkulation! Die Rechnung pafst genau auf unser Schema; für Knaben und Mädchen setze man Kugeln, dann aber lasse man die Urne aus einer von unendlich vielen abstammen, so dafs wir die Möglichkeit auch der unwahrscheinlichsten Verteilung als ein objektiv gewährleistetes Rechnungselement mit verwenden dürfen. Die Analogie hat für dieses Beispiel unter allen statistischen, wie zugegeben werden mufs, den geringsten Zwang nötig. Nur sollte man weder das Wort „Theorie" oder ähnliche Bezeichnungen, welche so aussehen, als könnte ihr Inhalt uns den Vorgang im Sinne einer Erklärung näher führen, verwenden. Alle „theoretischen" hierher gehörigen Betrachtungen können höchstens den Anspruch erheben, uns die Rechnung zu erklären oder annehmbar zu machen; was wir in den uns zugänglichen Schriften vermissen, ist der überzeugende Nachweis, dafs sie auch einen Nutzen gewähre.

Wir unterschätzen die Bedeutung einer zutreffenden Analogie nicht; sie kann, wie den Irrtum aufdecken, so auch die Wünschelrute für verborgen liegende Erkenntnisse werden, und in letzter Linie weisen ja fast alle Bezeichnungen der Physik auf fruchtbare Analogien hin. Gesetz, Kraft, Energie, der kleinste Zwang, Trägheit und unsere mathematische Wahrscheinlichkeit in dem objektiven Sinne, welchen der Bernoullische Satz ihr giebt, alles das sind Gleichnisse. Nur vor solchen Analogien müssen wir uns hüten, die uns die Fundamente der Erkenntnis wieder untergraben.

Unsere Schemata knüpfen alle an Bedingungen an, die ledig-

lich menschliche Anordnung auch mit Rücksicht auf die ganze Wirkungsweise herstellt, und was wir hier Zufall nennen, davon sind wir ja überzeugt, erhält eben durch unsere sehr gegenständlichen Manipulationen eine objektive Bedeutung. Ist der Begriff des Zufalls sonst ein Ausdruck für unsere Auffassung gewisser Erscheinungen, so darf man doch das relativ Zufällige, im Gegensatz zum Notwendigen, nicht mit dem absoluten Zufall, dem schlechthin Unbestimmten, verwechseln, um von ihm irgend eine Bereicherung der Erkenntnis zu erwarten. Wer mit dem Zufall an die Erscheinungen der Natur herantritt, der ist in der Lage eines Philosophen, welcher die Ethik auf dem Prinzip des Bösen aufrichten wollte. Aber wenn wir schon zugeben könnten, die Geburten von männlichen oder weiblichen Kindern mit dem Zug von Kugeln zu vergleichen, weil wir vor der Geburt so wenig wissen, als vor der Ziehung, wie wollen wir aus diesem Argument irgend etwas erschliefsen? Es wäre eine sehr dürre Spekulation, die sich lediglich auf zahlenmäfsige Charakteristiken stützte und nicht vielmehr in ihnen Formen sähe, die der Belebung durch einen Inhalt von andrer Seite harren. Wir wissen also zunächst keinen Rechtsgrund, der die Analogie des Zufallsspiels legitimierte, fragen aber weiter: welches ist die Urne unter vielen, die wir in der Erscheinung der Geburten in Aktivität sehen? Die Aufgabe ist bei Meyer sehr unbestimmt, indessen mufs es ja der Praxis überlassen bleiben, die Fragen zu spezialisieren. Hier möchten wir nur wissen: ist dies gesuchte $x$ für die ganze Menschheit, für alle Zeiten oder nur auf einen gewissen Zeitraum berechnet? Die konstanten Bedingungen, welche das $x$ mit den Kugeln in der Urne voraussetzt, können nur für alle Ewigkeit gelten, oder sie existieren nicht, d. h. die Bedingungen sind selbst variabel. Nun gut, nehmen wir an, dafs die Voraussetzung nur so gemeint sein kann, wie sie dem Sinne aller statistischen Aufgaben entspricht, dafs es sich um konstante Bedingungen handelt, die in einem sehr grofsen Zeitraume zur Geltung kommen, so bleibt das Schema völlig gewahrt, und die Rechnung hat es nach der Fiktion mit einem regelrechten Zufallsspiel zu thun. Die Natur konnte innerhalb konstanter Bedingungen so frei schaffen, wie es ihr beliebt, wie sie vorher auch diese konstanten Bedingungen sich blindlings aus Millionen Möglichkeiten herauszugreifen in der Lage war. Wir haben einen Ausschnitt aus der Wirklichkeit, von dem wir mittels der Wahrscheinlichkeit aller möglichen Bedingungskombinationen und der für unser Resultat günstigen auf die Zukunft in der

Form und Bedeutung unserer Quotienten schliefsen wollen. Sollen wir nun, durch das Beispiel der Sonnenaufgabe (s. o. S. 221) gewitzigt, annehmen, dafs uns die Wirklichkeit, wie wir sie so aus dem täglichen Augenschein kennen, auch unbekannt sei? Fast scheint es so, denn die Rechnung verlangt, für jenes $x$ alle Hypothesen zwischen 0 und 1 als gleichwahrscheinlich einzuführen. Hier könnten die Permutationen des Binoms gute Dienste leisten, um die Sache einzurenken. Wenn Mischungsverhältnisse vorgängig nicht gleiche Wahrscheinlichkeit haben, warum soll dann für Knaben und Mädchen nicht gelten, was für sie eine so sichtliche Bedeutung hat? Indessen, Scherz bei Seite — wird uns nicht wirklich zuviel zugemutet, wenn wir alle Werte zwischen 0 und 1 als gleichberechtigt in die Bayessche Formel einsetzen sollen? Die Werte 0 und 1 sind für das Beispiel undenkbar, sie werden von den Integrationen automatisch überwunden. Aber wenn das $x$ sehr klein sein könnte, sagen wir nur 0,1 — das würde heifsen: auf 1 Geburt kommen nach den unbekannten Bedingungen 9 des andern Geschlechts — so würde uns die Möglichkeit des Zufalls, welcher trotzdem die uns bekannten Verhältnisse herbeiführt, doch schon absurd erscheinen. Wir rechnen aber getrost mit allen Brüchen von der Null an, da die Wahrscheinlichkeit a priori „aller Werte zwischen 0 und 1 gleich fähig erscheint". Sollen wir nun mit der logischen Theorie, die hier vorzügliche Dienste leistet, da logische, d. h. gegen die formalen Gesetze des Denkens verstofsende Argumente, abgesehen von der Setzung der ganz sinnlosen Grenzen, ausgeschlossen sind, den gewonnenen Boden aufgeben, der wesentlich dadurch befestigt ist, dafs wir von dem einfachen Urnenschema nichts opfern wollten? Jedes Schema enthält die notwendigen Merkmale, die im gegebenen Falle nur scheinbar fehlen können, weil sie bei der Analyse sich wieder einfinden müssen. Wir denken und schreiben nicht in der Form der Syllogismen, müssen aber die Figuren der Logik aufweisen können, wenn sie unserem Denken wirklich zu Grunde lagen. Geben wir die realen Bedingungen des Schemas auf, so sind wir der Leere blofser Möglichkeiten verfallen. Hypothesen im gewöhnlichen wissenschaftlichen Gebrauch ruhen auf der Einfachheit und Zwanglosigkeit, mit welcher sie uns ein Verfahren deuten; wenn wir aber so weit gekommen wären, dafs wir nach einer grofsen Zahl von Ziehungen aus einer Urne mit nur $w$ oder $s$ Kugeln ein bestimmtes Verhältnis kennen, so schliefsen wir mit der einfachsten Annahme alle logisch möglichen anderen aus und rechnen mit ihnen nicht weiter. Kein

Mensch würde heute fragen, mit welcher numerischen Wahrscheinlichkeit wir die Undulationstheorie anzusetzen haben, auch wenn es möglich wäre, ihr als logisch gleichwertig eine oder mehrere Theorien zur Seite zu setzen.

Und weiter: auch für die Untersuchung des Urnenschemas selbst haben die möglichen anderen Urnen, von deren Existenz wir ganz und gar nichts wissen, keinerlei Interesse. Wir fragen höchstens: In welchen Grenzen kann sich das wirkliche Verhältnis der Kugeln in der Urne noch bewegen? Die Bayessche Regel giebt darauf keine Antwort, die durch ihre Zahlen gerechtfertigt wäre, so plausibel ihre Resultate für das Urnenbeispiel sind. Für die Verteilung der Geschlechter bei den Geburten ist unser Urnenschema nur eine durch nichts begründete Zuthat unserer eigenen Gedanken; daraus kann aber nimmermehr weder für wirkliche noch für noch so wahrscheinliche Grenzen etwas Objektives folgen. Die Zahl der Beobachtungen ins Ungemessene vergröſsern heiſst bei jeder statistischen Aufgabe den Zweck der Erhebungen vereiteln. Sie sollen charakterisieren und nicht die Eigentümlichkeiten verwischen. Jene Grenzen sind durch Zählungen auf Grund wesentlicher Unterscheidungen des Materials empirisch festzustellen, sie sind selbst wieder empirische Daten, vielleicht die einzigen von Interesse, welche den Einzeldisziplinen Aufgaben stellen, aber wie sie auch auch ausfallen, berechtigen sie nicht, mit der Bayesschen Regel zu rechnen.

Man versuche sich nur klar zu machen, was in der Rechnung des Beispiels unter einem Hut, in der äquivalenten Zähloperation und der sie bedingenden Subsumption, vereinigt ist. Zugegeben, daſs die Bayessche Regel die eine Urne voll Kugeln richtig beurteilte, so hat man hier eine Reihe leichtverständlicher, unserer Willkür unterliegender einfacher Maſsnahmen, ob wir selbst ziehen oder einen mechanischen Apparat spielen lassen, dort bedeutungsvolle Erscheinungen, die, unserem Willen entrückt, in das tiefste Geheimnis sich hüllen. Von allem Wirklichen bleibt nur das inhaltsloseste Schema, die Zahl. Als einzige Übereinstimmung erweist sich die Alltäglichkeit der Vorgänge, die unserer begierigen Forschung so unendliche Schwierigkeiten entgegenstellt, wie dies uns allen gewohnte Leben überhaupt. Giebt uns die absolute Unkenntnis, die von fundamental anderer Natur ist, als bei den Kugeln, eine Spur von Recht, undurchdringliche Gebiete in unserem Verstande projiziert zu

vermeinen, da wir nicht einmal wissen, ob sie uns nur zum kleinsten Teile jemals zugänglich sein werden?

Welcher blasphemische Gedanke, den Begriff des Zufallsspiels auf die Allmutter Natur anzuwenden, der wir selbst unser Dasein verdanken!

Aber auch den einfachsten Anforderungen der Erkenntnislehre widerspricht es, mit der Bayesschen Regel wahrscheinliche Abweichungen im Geschehen festzustellen.

Es ist eine völlige Verkehrung der Aufgaben, wenn man jene Grenzen aus der Zahl der Fälle zu erschliefsen sucht, um eine vermeintliche Basis für die Rechnung zu gewinnen, während eben die verschiedenen Resultate das statistische objektive Rohmaterial für die wissenschaftliche Arbeit abgeben. Mit einer Statistik seit Adams Zeiten würde sich gar nichts anfangen lassen, obwohl wir dann wüfsten, wieviel Knaben und wieviel Mädchen geboren worden sind. Oder würde diese Statistik vielleicht nur deshalb unbrauchbar, weil alle gezählten Fälle, vom ersten Paare, Adam und Eva, an, voneinander abhängig sind? Wer die Litteratur kennt, dürfte es nicht für ausgeschlossen halten, dafs mit einem solchen Argument gewirkt werden könnte.

Jenes Beispiel geht mit dem Schema zu Anwendungen über. Nicht mehr die einfache mathematische Aufgabe, sondern die Beurteilung der Wirklichkeit ist in Frage. Wir haben nicht mehr die Illustrationen des Spiels, sondern Ereignisse mit den Quotienten zu beurteilen, welche wir auf den gegebenen Thatbestand stützten, und die uns eine Richtschnur bedeuteten, wesentlich auf Grund kausaler Zusammenhänge, und nicht obwohl, sondern weil wir durch das, was man Zufall nennt, den Zahlenverhältnissen eine Bedeutung verliehen haben, die jeglicher Mystik entbehrt. Die Bayessche Regel ist der Abschlufs der Lehre, aber sie vermittelt nicht den Übergang zur Anwendung. Die neuen Gedanken, die sie scheinbar nötig hat, lassen sich mit Hülfe des Begriffs der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit umgehen.

In dem Lehrbuch von Meyer finden sich ferner auf S. 166 folgende drei „Grundsätze“, welche „die Grundlage der Theorie der Wahrscheinlichkeiten von Ursachen und künftigen Ereignissen, abgeleitet aus der Beobachtung vergangener oder stattgehabter Ereignisse“, bilden. Dieselben lauten:

„1) Die Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen oder Ursachen, denen ein beobachtetes Ereignis zugeschrieben werden kann, sind

proportional den Anzahlen der günstigen Fälle, welche sie diesem Ereignis erteilen.

2) Der wahrscheinlichste Wert der unbekannten Ursache $x$ eines beobachteten Ereignisses $E$ ist derjenige, welcher die Wahrscheinlichkeit $y = f(x)$ desselben zu einem Maximum macht.

3) Bedeutet

$v$ die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $E$;

$V$ jene des zusammengesetzten Ereignisses $(E, F)$;

$P$ die Wahrscheinlichkeit, dafs, indem $E$ eintrifft, auch $F$ sich ereignet, so ist offenbar

$$V = Pv,$$

woraus

$$P = \frac{V}{v}$$

geschlossen wird.“

Allenfalls dem ersten dieser Sätze könnte man axiomatische Bedeutung zusprechen, wofern davon abgesehen wird, dafs alle Wahrscheinlichkeitsbrüche erst auf denselben Nenner gebracht werden müssen. Dafs er nicht nötig ist, sondern nur als Folgerung aus dem dritten auszusprechen ist, um die dauernde Übereinstimmung mit dem gewöhnlichen Denken zu erweisen, mag ihm immer noch das Recht sichern, darauf hinzuweisen, wie man aus ihm den Bayesschen Satz abzuleiten vermag. Der dritte Satz nun, mit seinen Überlegungen, ist in der Form schon nicht mehr einfach, sondern eine bewiesene Beziehung, die auf das Prädikat „Grundsatz“ ersichtlich nicht den geringsten Anspruch hat. Der zweite Satz ist eine vollkommene Identität, wofern der Begriff der Wahrscheinlichkeit als einer mefsbaren Gröfse feststeht.

Weit entfernt von Splitterrichterei, zumal einem sonst vorzüglichen Buche gegenüber, kann man doch die Frage nicht unterdrücken: Wie soll hier der Lernende sich zurechtfinden?

Über den ersten und dritten Satz haben wir uns schon verbreitet. Der zweite bildet für Meyer im wesentlichen die Überleitung zu der Benützung des Wahrscheinlichkeitskalkuls in der Wissenschaft. Ergänzt wird er durch eine vorhergehende Bemerkung, nach welcher diejenige Ursache, welcher die gröfste Wahrscheinlichkeit zukommt, „einstweilen als die wahre Ursache angesehen werden kann“.

Anstatt die Frage aufzuwerfen: wie können wir nun unsern Schematismus in praktischen Fragen geltend machen? wird dieser

Schematismus selbst benützt, zu erweisen, was ihm einen Inhalt geben könne. BERNOULLI war der Meinung, ein Naturgesetz zu beweisen, dessen Inhalt dem blödesten Verstand einleuchten müsse. Aber was er wirklich gelehrt hat, ist ein Rechnungsverfahren, das angewendet werden kann, wenn dies „Gesetz" schon besteht. Eben der BERNOULLIsche Satz ruht auf der Annahme einer bestimmten Wahrscheinlichkeit für gewisse Ereignisse, und damit war schon gesagt, welches Verhalten mit großer Zuversicht zu erwarten war. Drehen wir die Sache um, so muſs doch wohl erst bewiesen werden, daſs ein solches Verhalten nicht bloſs wirklich ist, sondern daſs es auch nur auf die eine Weise zu erklären wäre, die wir in der Rechnung BERNOULLIS voraussetzen. In welcher Disziplin genügt denn das eine Argument, daſs wir ohne Widerspruch denken können, was eine ganz vage Vermutung ausspricht. Giebt es nicht hundert Annahmen, die man sich denken kann, die den Zahlen gar nicht widersprechen können, weil diese über das, was mit seinen millionenfachen Differenzierungen geschehen kann und wirklich geschieht, nicht das mindeste aussagen? Die mathematische Umkehrung eines Satzes ist nur eine formale Operation; sie ist nur zulässig in der Anwendung, sofern das, was vordem in der Voraussetzung gegeben war, nicht bloſs als denkmöglich und in der reinen Anschauung vorstellbar, sondern auch als objektiv begründet, wie eine gute Hypothese, angegeben werden kann. Ich meine hier nicht die Voraussetzung, daſs eine bestimmte Wahrscheinlichkeit existiere, sondern daſs überhaupt Gründe dafür vorhanden sind, daſs sie existieren könne. Hierin freue ich mich mit STUMPF übereinzustimmen (S. 106):

„Daſs ein solches Verhältnis günstiger und möglicher Fälle anzunehmen sei, sagen uns, um dies zu wiederholen, nicht unmittelbar die statistischen Zahlen. Es ist eine Hypothese, die selbst nur als wahrscheinlich erschlossen wird, neben der an und für sich viele oder unzählige andere Hypothesen logisch möglich bleiben."

Nur würde ich in dem, was wir bisher wissen, keine Begründung für eine Hypothese sehen; es handelt sich um eine völlig leere Fiktion oder, wenn man lieber will, um ein Gleichnis, bei dem in den wichtigsten Punkten die Vergleichungsmerkmale fehlen. Wenn ein Kaufmann seine Bilanz zieht, so hat er vielleicht eine Reihe von Jahren hindurch in vielen Fällen Verlust, in einer gröſseren Zahl Gewinn gehabt. Er hat sich in zwanzig Jahren eine Statistik gefertigt, die nahezu gleiche Verhältnisse aufzeigt. Wird nun ein Dritter, der unbeteiligt und ohne Kenntnis der Geschäfte

die Statistik liest, wenn er von diesen Zahlen auf die Zukunft schliefst, das Urnenschema nötig haben? Das tertium comparationis liegt ja nur in den Zahlen, und den beiden Möglichkeiten, die Urne mit ihren Gewinn- und Verlustkugeln, die in nahezu konstanter Zahl vorhanden sind, ist durch nichts begründet, noch weniger aber die Annahme vieler Urnen, die man in der Bayesschen Regel mit veranschlagen müfste. Es sind lauter Möglichkeiten, die wir täglich wirklich werden sehen, mit denen der Kaufmann rechnen, d. h. auf die er gefafst sein mufs, aber keine Hypothesen, mit welchen er so merkwürdig rechnen könnte. Mit den Zahlen allein an das Problem der männlichen und weiblichen Geburten heranzugehen, hat denselben Sinn, als wollte Jemand an solchen schematischen kaufmännischen Bilanzergebnissen ohne andere Kenntnis in die Geheimnisse der Volkswirtschaft eindringen. Die Zahlen charakterisieren, und wenn z. B. der Philolog uns mit einem Quotienten für die Wahrscheinlichkeit der Klassizität einer Form kommt, so wissen wir ganz genau, dafs er nicht zufällig in eine Urne gegriffen, sondern dafs er sich redlich abgemüht hat, alle ihm erreichbaren Quellen auszufischen. Er würde uns wohl mit verwunderten Augen ansehen, wenn wir ihn nach der wahrscheinlichen Abweichung seiner Bestimmung fragten; logisch waren ja wohl alle Fälle zwischen 0 und 1 möglich, und man hüte sich, ihm zu verraten, dafs jeder Quotient, den er bringt, der wahrscheinlichste Wert ist, ohne hinzuzufügen, dafs er sich mit der steigenden Zahl der Fälle auch immer mehr der Gewifsheit nähere, damit die Kräfte nicht zu früh erlahmen.

Bei den Geburten hat man versucht, aus den Ovarien und der Prädestination der Keime für das eine oder andere Geschlecht die Analogie wenigstens begreiflicher zu machen. Nie habe ich — man verzeihe die subjektive Bemerkung — diese Betrachtungen ohne Mifsbehagen lesen können. Schon die Zwillingsgeburten bereiten der „Theorie“ Schwierigkeiten; sie passen nicht in die Rechnung. Nimmt man die Aufgabe als eine lösbare an, so gehört sie in die Physiologie, welcher die Statistik die Zahlen auszuliefern hat mit allen anderen Erhebungen, die sich auf den Ursprung nach geographischer und ethnologischer Richtung beziehen. Zunächst will man aber nur wissen, wie man rechnen müsse. Das Urnengleichnis ist aber auch mit jener Fiktion nicht hergestellt, wenn nicht wieder „Hülfshypothesen“ gemacht werden. Um zu erweisen, dafs es sich bei den Geburten um eine auch nur zahlenmäfsige

Kongruenz mit einem Zufallsspiele handelte, würde man eine Unzahl von Beobachtungen nötig haben — das wird Niemand bestreiten. Hätte man diese aber, dann brauchte man wieder nicht mit nur erschlossenen wahrscheinlichen Abweichungen zu rechnen. Man hätte ja sicher beobachtete. Will man aber, wie man doch mufs, für ein Volk oder einen sonst wie abgegrenzten Bezirk wieder die Annahme machen, dafs man es mit einer besonderen Urne zu thun habe, so würde von neuem jene Anforderung an die Statistik herantreten. Auf diesem Wege kommt man nicht weiter. Die Präzisionszahlen, wenn sie wirklich der Statistik notwendig sind, was überzeugend nachzuweisen eine gute Aufgabe sein würde, lassen sich auf diesem Wege nicht begründen.

Von dem Urnenschema ist bei den Geburten nur ein Moment von einleuchtendem, unmittelbarem Zwang wiederzufinden, nämlich das logische Schema, welches von ihm ausgelöst wird. Das erstere ist nicht logisch, so wenig, wie die Elektrisiermaschine, die auch von keinerlei praktischem Gebrauch ist, oder die Atwoodsche Fallmaschine logische Schemata sind; was zu Demonstrationszwecken ausschliefslich verwandt wird, schematisiert die Wirklichkeit. Die Urne symbolisiert die Unbestimmtheit der einzelnen Fälle; ihr Inhalt, die Bestimmung, garantiert die objektive Grundlage der Disjunktion. Jenes logische Schema, die Disjunktion Knabe oder Mädchen, ist aber nicht der Rechtsgrund für die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, wie Sigwart und Stumpf annehmen, der eine auf subjektiver, der andere auf streng objektiver Basis. Die Wertung $\frac{1}{2}$ ist lediglich eine Schätzung, aber keine Bestimmung. Das statistische Ergebnis giebt der Schätzung einen andern Wert, aber die neue wie die frühere ruhen nicht auf subjektiven, sondern auf objektiven Grundlagen. Wie Stumpf der objektiven Theorie imputiert:

> „Die falsche Annahme, die wir gemacht hatten . . . ., betraf nicht unsern Wissensstand, sondern die Ursachen der Ereignisse. Von ihnen hatten wir vorausgesetzt, dafs sie nach beiden Seiten hin gleich lägen. Der Begriff der Chance und somit auch der gleichmöglichen Fälle bedeutet also doch einen objektiven Zustand, ein Verhältnis realer Bedingungen. Die aposteriorische Wahrscheinlichkeit läfst sich nicht mit der alten Definition vereinigen . . .“,

so werden wir sicherlich nicht argumentieren.

Liegt es denn wirklich so, dafs wir Menschen über die Geburtenverteilung ohne die statistischen Zahlen gar nichts wissen und nur die Disjunktion als Leitfaden haben? Würde sich denn

eine erhebliche Abweichung von der Parität den Augen verbergen können?

Sollte Süssmilch auch jetzt noch recht behalten, wenn er meint, es sei vor John Graunt, der 1666 schrieb, keinem Manne aufgefallen, dafs jeder eine Frau bekomme? Die Schätzung ist durchaus a posteriori und wäre ohne unsere Kenntnis eine Täuschung.

Der Lehrer im Dorfe wird aus der Frequenz der Geschlechter in der Schule eine Basis für die Schätzung gewinnen, und gröfsere Abweichungen müssen ihm auffallen. Unser alltägliches Leben lehrt, dafs alle wichtigen Vorgänge im menschlichen Leben sich mit grofser Regelmäfsigkeit abspielen. Ohne irgend welche zahlenmäfsige Kenntnis erwartet der Mensch vom Morgen das Gestern, und so ist es immer gewesen. Wäre diese alltägliche Konstanz in den menschlichen Dingen, wie da draufsen in der Natur, nicht die Regel, sondern die Ausnahme, so wäre auch die Statistik älter, als sie ist. Es ist gewifs sehr wichtig, dafs die letztere Beständigkeit auch in den Zahlenverhältnissen uns nachweist, aber man mufs sich über die Verwunderung wundern, mit der jene Zahlen zuweilen aufgenommen wurden.

Die Schätzung $\frac{1}{2}$ ruht also nicht auf unserer Unkenntnis, sondern nur auf dem, was wir wissen. Eine Erklärung für die gleiche Verteilung der Geschlechter können wir gar nicht verlangen; nur die Abweichung ist von einer gewissen Rätselhaftigkeit, die unsere Wifsbegier anspornt. Auch die Prädestination der Keime verschiebt die Dunkelheit nur um Geringes; sie wäre wichtig für die Physiologie, die solchen Annahmen freilich weder widersprechen noch zustimmen kann, weil sie von der Zeugung so gut wie gar nichts weifs.

Wir haben alle Ursache, uns zu bescheiden, aber wir sind gezwungen, kausale Momente vorauszusetzen, wo und wann wir an die Erscheinungen herantreten. Über so tief verborgen liegende Verhältnisse kann man nur spekulieren; die allgemeinsten, trivialsten Konstruktionen werden hier noch am leichtesten erträglich, und feine Hypothesen sind nur aus ästhetischen Gesichtspunkten zu beurteilen, wie andere Erdichtungen und Dichtungen überhaupt. Wir können Bilder über Bilder häufen und kommen keinen Schritt von der Stelle. Natürlich giebt sich in den Zahlen die Resultante einer Unzahl von Ursachen, die in unendlichen Verkettungen aneinander hängen, aber nach der Natur unseres Verstandes sind wir darauf eingeschränkt, nur da im kleinen mit unserer Untersuchung zu reagieren, wo sich ein Angriffspunkt bietet.

Du kannst im kleinen nichts verrichten
Und fängst es nun im grofsen an —

möchte man als Variante einer Variante den kühnen Spekulationen entgegenhalten. Man gebe dem Physiker die Richtung und Gröfse einer Bewegung, von deren Komponenten er gar nichts weifs, und man verlange von ihm, auch nur die wahrscheinlichsten uns aufzuzeichnen. „Gieb mir, wo ich stehe, und ich werde die Welt erschüttern," soll Archimedes gesagt haben. Aber er hatte wenigstens Kräfte, mit deren Art er operieren konnte; in den summarischen Aufgaben der Statistik fehlen die Kräfte, die man erforscht hätte, und nirgends ist auch nur die Spur eines Angriffspunkts.

Was wir durch die Zählung erfahren, ist in der That ein Erfolg, bei dem wir aus dem Inhalt des Geschehenen alles beseitigt haben, was individuell die Aufgabe der Forschung bedeutet. Eine Physik der Organismen läfst sich nicht en gros herstellen; man mufs das Einzelne zusammentragen und mit den Ideen, die wir der Natur entgegenbringen, vergleichen. Idee und Einzelforschung haben sich gegenseitig zu ergänzen und zu berichtigen. Dafs irgend welche natürliche Bedingungen die Geburt eines männlichen Geschöpfes herbeiführen werden, müssen wir denken, wenn der Boden der Erkenntnis nicht mit dem der Metaphysik vertauscht werden soll. Mit supranaturalistischen Anschauungen hat man aber jede Wissenschaft zu verschonen; es bleibt uns nur gestattet, im Sinne Kants die Natur unter dem Gesichtspunkte regulativer Prinzipien der Vernunft zu betrachten. Auch wenn uns keine Handhabe zur Verfügung steht, Zweckmäfsigkeit und Ordnung in dem Reiche der Dinge objektiv nachzuweisen, so wäre es thöricht, mit dem Gedanken an die Forschung zu gehen, dafs, wie im einzelnen uns alle Vorgänge einen kausalen Charakter haben, dieser im grofsen Weltgetriebe verloren gehe, weil wir ihn nicht zu erkennen vermögen. Nur dürfen wir nicht voreilig meinen, dafs sich mit diesen Ideen allein etwas aufbauen liefse; sie sind von regulativem und nicht von konstitutivem Gebrauch. Dafs unsere Schätzung der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und die durch die Statistik berichtigte zur Beurteilung eines vergangenen und eines zukünftigen Geschehens geeignet sei, dafür bürgt uns die Sicherheit, mit der wir uns in der Welt mit unserem Verstand und mit unserer Vernunft zurechtfinden. Dafs konstante Bedingungen, die sich auch nur annähernd mit dem Kugelvorrat in der Urne oder der festen Gestalt eines Würfels vergleichen liefsen, vorhanden sind, ist durch nichts

erweisbar, und das Gleichnis bleibt ein farbloses Bild ohne Umrisse, zumal bei dem Geheimnis, mit dem die Natur viel einfachere Prozesse sorgfältig zu hüten scheint, jede Möglichkeit abgeschnitten ist, sich auch nur die Spur einer Vorstellung zu bilden. Unser Gebrauch der statistischen Zahlen ruht auf demselben Vertrauen, mit dem der Wilde dem Wiederaufgang der Sonne entgegensieht. Was wir erwarten, ist nicht so eindeutig wie diese Erscheinung, aber das Vertrauen ist derselben Art, und wie beim Wilden nicht die Unwissenheit, sondern das, was er täglich sieht, die Erwartung auslöst, so ruht auch der Einfluſs, den wir geeigneten Zahlen der Statistik auf unser Urteil einräumen, nicht auf negativem, sondern auf einem thatsächlich vorhandenen Fundament.

Wenn wir nun jene Annahme $\frac{1}{2}$ für weibliche oder männliche Geburten gar nicht gemacht haben, indem wir auf die Disjunktion und das uns stützten, was sie negativ aussagt, so werden wir auch die Schwierigkeit, die STUMPF findet, die Korrektur seiner objektiven Bestimmung $\frac{1}{2}$ mit deren objektivem Charakter in Einklang zu bringen, nicht zu überwinden und nicht zu diskutieren haben[1]).

---

[1]) Die BAYESsche Regel und ihre Erörterung führt STUMPF auf mehrere Inkonsequenzen. Wenn das Wahrscheinlichkeitsurteil seiner Definition und Auffassung entspricht, so ist der Satz (S. 102):

> „Wahrscheinlichkeiten hypothetisch setzen kann aber nur den Sinn haben, daſs man gewisse reale Verhältnisse hypothetisch setzt, auf Grund deren man, wenn sie uns gewiſs wären, dem Ereignis eben diese Wahrscheinlichkeiten zuschreiben würde“ . . .

nicht richtig. Warum sollen „hypothetisch gesetzte“ Wahrscheinlichkeiten sich nicht auch mit einem disjunktiven Urteil und der bekannten Prämisse begnügen dürfen?

Und ferner:

> „Mischungsverhältnisse haben allerdings nicht vorgängig gleiche Möglichkeit. Aber dies verschlägt hier (bei den hypothetisch gesetzten Urnen d. V.) nichts, wo sie nur benützt werden, um den Sinn der verschiedenen Hypothesen und der resultierenden empirischen Wahrscheinlichkeit zu veranschaulichen.“

STUMPF trennt nämlich den Fall der Anwendung des BAYESschen Prinzips, welcher sich auf eine groſse Reihe von Beobachtungen bezieht, obwohl er zunächst mit den Mischungsverhältnissen als von ungleicher Wahrscheinlichkeit wirklich rechnet. Ich gestatte mir die Frage: wieviel Züge müssen erfolgt sein, damit man die Verteilungen nur zur Veranschaulichung des „Sinnes der verschiedenen Hypothesen“ benützen dürfe? Und was heiſst das letztere, da man doch mit den verschiedenen Hypothesen rechnen soll? Nicht anders, als POISSON es in dem angefochtenen Beispiele hat, an welches sich die

Wir werden auch nicht sagen, dafs sich „die aposteriorische Wahrscheinlichkeit nicht mit der alten Definition vereinigen“ lasse. Im Gegenteil, sie ist im Gefüge der Rechnung fest enthalten, und wir fragen nur anders:

Wie läfst sich die Wahrscheinlichkeit a priori und die a posteriori, die beide völlig derselben Grundlagen bedürfen, in der Wirklichkeit anwenden?

Es liegt nicht im Plane dieser Arbeit, hier eine erschöpfende Besprechungen der Anwendungen zu liefern, zumal der Verfasser diese Aufgabe in besonderer Schrift zu behandeln gedenkt. Wichtig erschien ihm vor allem, dafs eine feste Stellung zu dem Inhalt der Lehre genommen wird, die immer den Anspruch auf ein Kapitel der Methodenlehre erheben darf.

Jegliche Art von Statistik kann den Anlafs zu jenen Quotienten geben, die wir als Wahrscheinlichkeiten bezeichnen. Es ist nur die Frage, ob sie als solche in aller Schärfe dem Schema entsprechen, dafs wir, wo nicht die Bayessche Regel, doch die Resultate und den Inhalt des Bernoullischen Satzes anwenden dürfen. Dieser giebt Vorschriften numerischer Natur und setzt die Urne mit ihrem konstanten Inhalt und dem ganzen Apparat voraus, den wir Zufall nennen.

Wenn nun in der That sein Gedankeninhalt so einleuchtend ist, wie er Bernoulli alltäglich erschien, und wie es das von Bertrand angegebene Beispiel vom Karussellplatze (s. o. S. 174) beweist, so ist doch, wie mir scheinen will, überall, wo wir den Satz nicht mit Exaktheit, sondern nur nach seinem allgemeinen Gehalt aussprechen, ein wesentlicher Unterschied zu machen. Dieser beruht lediglich in der Auffassung der Welt, wie unsere Vernunft sie vorschreibt. Ihr widerstrebt es, mit dem Urnengleichnis bei irgend welchen uns bedeutsam erscheinenden Vorgängen dem Zufall eine Rolle einzuräumen, wo es uns viel näher liegt, an Ordnung und Zweckmäfsigkeit und ein gesetzmäfsiges Verhalten zu glauben; nicht anders erscheint es uns unerträglich, an den Würfel- und Urnenbeispielen

---

Kritik v. Kries' knüpfte. Und ferner: wenn nach dem Bernoullischen Gesetz sich schon der hier nötige Aufschlufs über die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Falles ergeben sollte, warum dreht man den Satz erst um? Und warum können wir, nachdem eine Abweichung von den ursprünglich für die einfachen Ereignisse aufgestellten Quotienten sich in den Zahlen zeigt, die „ursprüngliche Hypothese“ festhalten? (S. 101) „Sie bleibt logisch möglich wie jede andere.“ Eben deshalb wird auch mit ihr in der Bayesschen Regel gerechnet, aber nicht um sie festzuhalten, sondern um sie zu überwinden.

den Determinismus geltend zu machen und von vornherein anzunehmen, dafs jede Kugel, weil ihr Zug kausal bedingt ist, nunmehr auch als im Weltgeschehen für das Erscheinen an bestimmter Stelle prädestiniert zu betrachten ist. Bei den Zufallsspielen, also bei den nicht allein völlig hinreichenden, sondern auch den einzigen den Gegenstand der Rechnung allseitig beleuchtenden Illustrationen, konnte es gelingen, dem Zufall einen bestimmten objektiven Charakter zu geben. Hier ist er lediglich ein Name für alle Ursachen, die von den konstanten realen Bedingungen völlig unabhängig in Aktion traten. Unsere Vernunft hat keinerlei Interesse, ihrer Wirkungsweise im einzelnen zu folgen. Die Unterscheidungsmerkmale der einzelnen Fälle waren so blafs, dafs die Kontradiktion „Ordnung und Unordnung“ nur Sinn behielt in den Zahlenverhältnissen, die den konstanten Bedingungen angemessen waren. Auch die extremen sehr wahrscheinlichen Fälle erscheinen vom Standpunkte des Spiels fast als Unordnung, weil sie vom Zufall hier verlangen, dafs er die einzig bedeutungsvollen Ursachen adäquat sich geltend machen lasse. Jene Unordnung mufste mit der Steigerung der Versuchszahl durch einen Ausgleichungsprozefs überwunden werden, der nichts Mystisches enthalten konnte, weil er unserem Verstande als das Angemessenste erschien. Er ist eine Thatsache, wenn er sich vollzieht, aber es geschieht kein Wunder, wenn er einmal ausbleibt.

Windelband hat in seinen sehr ansprechenden Untersuchungen über die Lehren vom Zufall seinen Faden an den Beziehungen Zufall und Ursache, Zufall und Gesetz, Zufall und Zweck, Zufall und Begriff abgesponnen, lauter Gegenüberstellungen, die Ordnungsbegriffe und -Prinzipien, mit welchen wir an die Welt herantreten, in eine sichtliche Opposition zu dem stellen, was hin und wieder als Objekt der Wahrscheinlichkeitsrechnung bezeichnet wird.

Aber schon der erste Schritt von der Lehre zur Anwendung giebt uns Anlafs, mit der Ordnung des Zufalls zu brechen und nach Mafsgabe seiner kontradiktorischen Prinzipien zu verfahren.

Eine Auffassung des Wirklichen als eines Teiles des Möglichen, aus dem es sich nur auf Grund einer arithmetisch-dynamischen Konkurrenz emporheben sollte, die logisch sich zwanglos aussprechen läfst, entbehrt nicht allein jeglicher Objektivität, sondern sie beraubt uns des einzigen Bindemittels, mit dem wir in der Erkenntnis die Webefäden zu einer einheitlichen Gestalt verknüpfen, wie wir es auch im einzelnen Falle nennen, ob Gesetz, ob Zweck, ob Ordnung; mit einem Worte, es ist das Prinzip der Kausalität, das allem

Denken zugrunde liegt. Wenn wir mit den Möglichkeiten im Würfelspiel rechnen, so wissen wir, welcher Art die Wirklichkeit war, die den Zahlen im Zähler und Nenner entsprach. Wir selbst hatten sie ihr planmäfsig verliehen, aber nirgends in der Welt entspricht objektiv dem Würfelspiel ein Geschehen, auch wenn die Zahlen als einziger Vergleichspunkt uns mit dem Scheine täuschen, dafs es so sein könne. Nur wo wir selbst den Zufall arrangieren, kann der Schematismus der Rechnung mit seiner ursprünglich festgesetzten Bedeutung unmittelbar angewandt werden. Wir können aber trotz der schönsten Disjunktionen nicht an die Zahlen der Statistik herantreten, indem wir von ihnen voraussetzen, dafs sie konstante Bedingungen mit den Chancen der Zahlen zum Ausdruck bringen, so dafs alle logisch möglichen Fälle sich aus dem Bereiche des Nenners mit gleichem Recht in die Summation des Zählers aufzuschwingen vermöchten. Es widerspricht sich logisch kein Mafs der Anziehung der Massen. Ein Schöpfer der Welt enthält keine logische Unzuträglichkeit, er hat also logisch und seinem Begriff nach einen Spielraum — ja, meinen wir wirklich, nur zwischen einer einfachen indirekten Proportionalität und der umgekehrten dritten Potenz der Entfernung, deren Quadrat im Nenner des bekannten Mafses auftritt? Dann ist unser Gravitationsgesetz nur ein solches nach der wahrscheinlichsten Hypothese. Warum sollen diese Überlegungen hier verboten sein? Der Materialist wird meinen, im Anfang waren nur Massen vorhanden mit inhärenten Gesetzen, den konstanten Bedingungen, und dann ging das grofse Würfelspiel „die Welt“ los. Kant hat recht: wir dürfen mit dem Spielraum unserer Gedanken nicht die Welt messen wollen, weder im grofsen noch im kleinen. Unsere Begriffe dulden jene Windelbandschen Kontradiktionen Zufall — Gesetz u. s. w.; wenn sie richtig sind, erschöpfend können sie ja nicht sein, so ist für eine Metaphysik immer die Wahrscheinlichkeit nach jeder Seite $\frac{1}{2}$; warum auch nicht, da sie beide logisch „gleich möglich“ sind. Ich wüfste nicht, was logisch der Zufallshypothese für die Welt im Wege stünde. Eine Hypothese ist so denkbar wie die andere, und da wir es hier doch wohl mit dem allgemeinsten Fall der Wahrscheinlichkeitsaussage zu thun haben, und da jeder Spielart des Zufalls ein Prinzip der Ordnung entgegentritt, so sind wir ihm mit der Hälfte der Gründe verfallen. Den Gedanken, dafs diese Welt die beste unter allen möglichen Welten sei, hatte Leibniz aus dem Bereich des logisch Möglichen genommen, aber die zufällige Wahl läfst sich nicht er-

tragen, „Gottes Weisheit hätte die bessere Welt erkennen, seine Güte sie wollen, seine Allmacht sie schaffen müssen“ (Überweg, Gesch. d. Phil. S. 151). Das Zusammenstimmen von Leib und Seele, wie es der Occasionalismus lehrt, öffnet dem Zufall Thor und Thür, aber die prästabilierte Harmonie schafft Ordnung.

Wie hier das Interesse der Vernunft die Weltanschauung an anthropomorphistischen Gedanken modelt, so soll auch das Urnengleichnis via Bernoulli die Unerträglichkeit des Gedankens, dafs sich das Geschehen in einer so indifferenten Weise abspiele, wieder beseitigen. Aber der Bernoullische Satz rechnet mit Zahlen, die für das Spiel nicht allein logisch möglich sind, sondern die, wie sie auch aussehen, sofort kombinatorisch in der Wirklichkeit nachgewiesen werden können.

Es ist doch wohl unserer abstrahierenden Phantasie zuviel zugemutet, alles wegzudenken, was wir wissen, und mit dem Urnenschema, dem überdies von den wesentlichsten Vergleichspunkten einige fehlen, an diese lebendige Welt heranzutreten. Mit solchen Gleichnissen beruhigt man Kinder — nur giebt man ihnen hübschere.

Man kann zuweilen lesen, dafs es die Aufgabe der Statistik sei, konstante Verhältnisse in den Zahlen festzustellen. Dieser Gedanke ist ein Rest der Anschauung, die in der Ermittlung statistischer Zahlen eine Messung von Naturkonstanten sah. Er ist, wenn nicht alles trügt, im Schwinden begriffen. Wie überall in der Erkenntnis ist es die Veränderung, an die ein Interesse sich knüpft, und die Abweichungen in den Zahlen erbieten sich als soviel Aufgaben, nach den Ursachen, nach funktionellen Beziehungen zu suchen. Es wird gut sein, aus kleinen Zahlen nicht voreilig zu schliefsen, da in ihnen sich solche Ursachen geltend gemacht haben können, welche das Urteil des allgemeinen Sinnes, den man mit ihm verbinden will, berauben. Aber die alte Vorstellung von den konstant wirkenden Ursachen und der Ausgleichung der zufälligen in einer grofsen Zahl von Daten soll man insoweit aufgeben, als man zur Beurteilung das Bernoullische Theorem heranzieht.

Wer an irgend eine statistisch charakterisierte Erscheinung mit den Zahlen der Bayesschen Regel herantritt, der argumentiert, wenn er nicht blofs rechnet, sondern sich auch über das, was er thut, Aufschlufs zu geben sucht, in dieser Weise:

Ich rechne, als ob ich eine absichtslos unter unendlich vielen Urnen gewählte vor mir hätte, die also wirklich alle vorhanden und in denen alle Verteilungen repräsentiert sind. Aus dieser Urne

denke ich mir so viele *s* und *w* Kugeln herausgezogen, als meine Statistik Fälle der einen und andern Art aufzählt.

Wer sich auf die Bernoullische Entwicklung stützt, der hat sich zu sagen:

Die gezählten Fälle geben mir für eine bestimmte Urne zwar nur das wahrscheinlichste Verhältnis der Kugeln. Ich nehme es aber bei der grofsen Zahl als sicher an und rechne so, als ob die Ziehungen ohne Absicht vorgenommen sind.

Haben wir es bei allen Wahrscheinlichkeitsbestimmungen mit einer plausiblen Übereinkunft zu thun, so wäre hier zu sagen: Nun gut, auch über die Anwendung dieser Sätze und dieser Rechnung wollen wir uns verständigen. Darüber ist nicht zu streiten, wenn sie irgend welche praktische Bedeutung aufzuweisen vermag. In beiden Fällen entscheidet wesentlich für das Resultat die Zahl der konstatierten Fälle. Ist es denn da, wo man mit verschiedenem Umfang des Materials arbeitet, nicht das Einfachste, ihn anzugeben? Wahrscheinlichkeitsaussagen wollen nur das Urteil lenken; ist denn diese Direktive aus den Dingen ableitbar? Überlassen wir uns nicht einer Lotterie, die, wenn sie schon ein Gleichnis vorstellen könnte, uns eine bestimmte metaphysische Ansicht, wenn auch nur als vorläufig geltend, aufdrängte. Ist es denn im Interesse unserer Vernunft, uns zu denken, dafs es sich in der Welt so verhielte, dafs alle erdenkbaren Fälle, so verschieden und millionenfach bestimmt in ihrer Eigenart sie bei der Einzelbetrachtung sind, in den Welturnen der Möglichkeit ein geruhsames Dasein führen, bis sie, aus der einen Urne erlöst, in eine andere geworfen werden, wie es dem Zufall, der nur an der Zahl seine Schranke hat, gefällig ist? Sollte da nicht die Vorfrage erlaubt sein: Für welchen Zweck ist diese Anschauung unerläfslich?

Ist denn nicht genug geschehen, wenn dem Blutumlauf der Welt mit den Zahlen der Puls gefühlt wird? Wenn ein berühmter Naturforscher sagen konnte: „Eine einzige Zahl hat mehr wahren und bleibenden Wert als eine kostbare Bibliothek von Hypothesen", so mag's genug sein und man beraube die Zahl nicht ihres Werts durch Hypothesen, die nicht einmal auf diesen Namen gerechten Anspruch haben.

Von jenen Kombinationen mit den Möglichkeiten des Zufallsspiels führt zu den Zahlen der Statistik, welche überall darauf ausgehen soll, funktionelle Beziehungen, wenn nicht nachzuweisen, so doch symptomatisch der Bestätigung durch weitere Untersuchungen

zu unterbreiten, keine Verbindung. Hier ist nirgends ein widerstandsfähiges Material, in welchem wir versuchen könnten, einen Haken einzuschlagen, um die Theorie des Zufalls an ihm zu befestigen. Die Auffassung, dafs es sich so verhalten könnte, als seien konstante Bedingungen in ihrer vollen Bestimmtheit wirksam, und dafs sie nur hin und wieder durch Störungen beeinträchtigt werden, die im Gesamtbilde sich wieder auslöschen, hat manches für sich. Aber alles spricht bei näherer Überlegung dagegen, dafs eben jene Bedingungen sich so verhielten, dafs sie in den noch so gut geordneten Zahlen sich offenbarten, oder auch nur, dafs eine solche Manifestation einen andern als den Charakter eines einzelnen, sehr vorsichtig zu behandelnden Symptoms abgeben könnte.

Wir sind weit entfernt, zu leugnen, dafs man sich auch in der Statistik, wenn alle anderen Mittel versagen, hin und wieder die Frage vorlegen könnte: wie würden sich im gegebenen Falle die Zahlen stellen, wenn wir es mit einem Zufallsspiele zu thun hätten? Wer sich dann, weil ihm die Abweichungen bemerkenswert erscheinen, zu weiteren Nachforschungen anspornen läfst, der ist jedenfalls auf rechtem Wege. Nur gegen die Auffassung richtet sich unsere Betrachtung, welche mit den wahrscheinlichen Abweichungen umgeht, als ob sie eine den Zahlen wirklich zukommende charakteristische Messung oder auch nur Schätzung bedeuten. Nur was man bei der Rechnung zu denken hat, soll hier erörtert werden; dafs aber die Darstellungen dem Leser, der sich orientieren will, zuweilen „schauerliche Kohlen“ zum Forttragen bieten, wo er nach „verborgen-gold'nem Schatze“ schürft, wird schwerlich bestritten werden. Die Naturwissenschaft hat bei Fehlerbestimmungen zwar einen problematischen Boden, den sie als solchen anerkennt, aber die Gröfsen, welche sie bestimmen will, sind wirklich vorhanden wie die Fehler, die mit der Unvollkommenheit aller menschlichen Vorrichtungen, der Methoden wie der Instrumente, verbunden sind. Hier mufs man sich für einen Wert entscheiden, und die üblichen Methoden haben nicht allein plausible Direktiven für sich, sondern sie haben sich auch praktisch bewährt. Diese Zweckmäfsigkeit läfst sich da, wo „wahre Werte“ nur Fiktionen bedeuten, in keiner Weise darthun, ganz davon abgesehen, dafs uns z. B. der wahre Wert irgend einer statistischen Wahrscheinlichkeit zumutet, an einen Sachverhalt zu glauben, der völlig dem Urnenschema entspricht. Auch der unregelmäfsige von ebenen Flächen begrenzte Körper, über dessen Wahrscheinlichkeitsqualität eine Unzahl von Würfen

Aufschlufs geben kann — man versteht leicht, was gemeint ist —, kann hier nicht klar machen oder begründen, was nur aus Untersuchungen mit dem Schweifs der Einzelforschung zu gewinnen ist. In dem Körper sind konstante Bedingungen gegeben, die sich Geltung verschaffen werden, wenn Jemand da ist, der das Würfelspiel besorgt. Hier haben die Wahrscheinlichkeiten, die jeder Eventualität zukommen, eine feste Bedeutung, aber auch sie können mit den Mitteln der Disziplin nur mit Wahrscheinlichkeit angegeben werden. Nur dem regelmäfsigen Körper von idealer physikalischer Qualität kommen die Quotienten als feste Bestimmungsstücke zu und, kein Wunder, als Daten aus dem, was wir wissen, und nicht aus dem, was uns verschlossen ist. Darin liegt der Unterschied zwischen der Bestimmung a priori und der a posteriori, dafs letztere in ihren Voraussetzungen den Einflufs aller jener Ursachen enthält, die wir als Zufall innerhalb der Disziplin definieren konnten. Aber in der Anwendung auf statistische Zahlen läfst sich weder fest definieren, was man unter konstanten Bedingungen verstehen, noch was man dem Zufall anheimstellen will. Darin liegt die ganze Schwierigkeit der statistischen Methoden, dafs ihnen die begrifflich fest abgegrenzten Ursachen der Naturforschung nicht zu Gebote stehen. Was auf Einwirkung der Gravitation, der Elektrizität, der Wärme im Einzelgeschehen zurückzuführen ist, das läfst sich nahezu exakt feststellen; ob aber der Beruf, das Klima, diese bestimmten Lebensgewohnheiten einen eindeutigen Einflufs auf ein statistisch markantes Resultat ausgeübt haben, und was in jeder Untersuchung auf zufällige Einflüsse zurückzuführen ist, können uns die Zahlen an der Hand der Bayesschen Regel so wenig als unter der Führung Bernoullis lehren.

Die Statistik hat Zahlen zu ermitteln, denen die Fähigkeit zu charakterisieren eigen ist; sie hat die Aufgabe, zu vergleichen, die Unterschiede und Gleichheiten, die sie vorfindet, an den sonstigen feststehenden Ergebnissen der Einzeldisziplinen zu messen und den Versuch zu machen, ihre Resultate zu erklären. Das kann sie alles nur mit Wahrscheinlichkeit erreichen; die Sicherheit der Induktion in der Physik ist ihr versagt. Will man von einer statistischen Induktion sprechen, so fehlt dieser ein wichtiges Hülfsmittel, das Experiment, dem die Statistik nur eine begriffliche Elimination der Ursachen entgegenzustellen hat. Die Ausschliefsung der Ursachen vollzieht sich in der Physik an der Einzelerscheinung, in der Statistik an den knappen, blutleeren Resultaten, den Zahlen.

Wie jede Wissenschaft hat sie das, was sie Einzelbeobachtungen nennt, zu allgemeinen Resultaten zu verwenden; sie mufs versuchen, durch Anordnung ihres Materials das Zufällige, d. h. hier wie in der Physik das für die Frage Unwesentliche, Gleichgültige, zu überwinden, aber da alle diese Operationen sich an Begriffen vollziehen, denen eine eindeutige, getrennt zu denkende Ursache in der Wirklichkeit weder entspricht noch entsprechen kann, so kommt sie auch nur zu wahrscheinlichen allgemeinen Sätzen. Diesen Sätzen kommt hinwiederum nur eine hypothetische Bedeutung zu, auch wenn sie aus den Beobachtungen völlig richtig erschlossen sind. Überall, wo sich bisher gewisse Ursachen nachweisen liefsen, haben sich gewisse Folgen aus den Zahlen konstatieren lassen; einen solchen Satz darf man als eine Aussage ansehen, die einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt, wenn eine hinreichende sonstige Begründung sich geben läfst. Aber Bedeutung für die Zukunft hat er nur dann, wenn eben die Ursachen auch ferner wirksam sein werden. Eben über das Fortwirken derselben Ursachen ist man aber niemals unterrichtet; man kann nicht experimentieren und nicht in die Zukunft sehen. Man hat also, auch wenn sich die Untersuchung nicht auf Zahlenargumente allein, sondern auf anderweitige plausible Gründe gestützt hat, keine allgemeine Wahrheit gewonnen, aus der sich deduktiv wieder etwas ableiten liefse, das für die Zukunft Anspruch auf Gültigkeit erheben kann.

Der Begriff des Zufälligen wird seiner Relativität erst dann entkleidet, wenn das Schema der Urne wirklich hergestellt, wenn gelost wird. Auf dem ganzen Wege aber, der von dem, was als zufällig nur angesehen wird, zu dem definierten Zufall führt, ist nirgends eine Station, auf der man sagen könnte, dafs die Ursachen, die man untersuchen will, wirklich allein so zur Geltung gelangen, dafs man von ihrer Feststellung und einer eindeutigen funktionellen Beziehung zu überzeugen wäre.

Die Regelmäfsigkeiten, welche von der Statistik erhärtet werden, sind soviel Thatsachen, mit welchen wir in praktischer Absicht rechnen dürfen und müssen. Gar nicht anders als überall im Leben beurteilen wir nach der Vergangenheit die Zukunft, und die Überzeugung, dafs die Lebensbedingungen sich nicht sprungweise verändern, berechtigt uns, von einer vernünftigen Schätzung zu erwarten, dafs ihr die Wirklichkeit nicht wesentlich widersprechen werde. Dem Versicherungswesen hat auf der Grundlage dieser

Gedanken die Wahrscheinlichkeitslehre einen Rechenschematismus geliefert, der, wie man wohl behaupten darf, alle Kalkulationen des Verkehrs wesentlich an Feinheit übertrifft. Die „Rechnung des Zufalls“ mit allen sich anschliefsenden Erwägungen hat sich praktisch über ein Jahrhundert bewährt, aber nicht das von BERNOULLI bewiesene Gesetz der grofsen Zahlen erklärt uns diesen Erfolg, sondern der richtige Gedankengang des gesunden Verstandes, den die Kombinatorik nicht zu stützen nötig hatte.

Man kann zweifeln, was eigentlich beabsichtigt wird, wenn die Quotienten der Statistik als Wahrscheinlichkeiten nach der wahrscheinlichsten Hypothese durch ein paar Formeln nachgewiesen werden. Will man darauf hinweisen, dafs man den wahren Wert nicht kenne, oder dafs man es mit den wahrscheinlichsten, d. h. den einzig verwendbaren Werten zu thun habe? Beide Deutungen weisen auf das Zufallsspiel zurück, und doch ist die Absicht aller dieser Rechnungen, nicht ein Spiel, sondern eine sehr plausible wirtschaftlich wichtige Vorsorge: es gilt die Wechselfälle des Lebens vom Einzelnen auf eine Gesamtheit zu übertragen, in der sie den Charakter von Zufälligkeiten so sehr entbehren, dafs man es als einen Zufall bezeichnen würde, wenn die Verhältnisse sich wesentlich günstiger gestalteten, als es die Rechnung vorgesehen hat. Die Schätzungen der Statistik für praktische Zwecke haben es nicht mit einem „wahrscheinlichsten Falle“ zu thun, sondern mit Ermittlungen, bei welchen eine Wahl gar nicht mehr bleibt, und wo dies doch der Fall sein sollte, da sind es sehr gut fundierte Erwägungen, welche den Entschlufs bestimmen.

Das Versicherungswesen ist mit den Zufallsspielen immer zugleich erörtert worden. Der prinzipielle Fehler, dafs man unter Umständen mit Möglichkeiten rechnete, die eben nur logisch vorhanden und nirgends indiziert sind, hat der Praxis so wenig geschadet, wie die Lehre vom horror vacui das Bohren der Brunnen und ihr Funktionieren verhindern konnte. In neuerer Zeit hat auf Grund der Zufallshypothese sich in verschiedenen Schriften eine Theorie des Risikos etabliert, welche die wahrscheinlichen Abweichungen der Wirklichkeit von dem Kalkül der „Sterbeordnung“ auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermitteln will. In der That ruhen aber die Vorsichtsmafsregeln, welche das Versicherungswesen seit je gebraucht hat, um das allgemeine Risiko, dafs Wirklichkeit und Rechnungsgrundlage voneinander abweichen, mit Ruhe zu tragen, nicht auf theoretischer Basis. Dafs es nicht das BERNOULLIsche Gesetz

der grofsen Zahlen mit seinem mathematischen Inhalt ist, welches mit steigender Zahl der Versicherten dem Betrieb der Anstalten Festigkeit verleiht, lehren die einfachsten Überlegungen. Man darf vertrauen, dafs ein Zufallsspiel innerhalb der Abweichungen bleibt, für welche der BERNOULLIsche Satz hohe Wahrscheinlichkeiten berechnet, aber seine vorausgesetzten Wahrscheinlichkeiten sind feste, eindeutig bestimmte Gröfsen von objektiver und — man braucht sich vor dem Wort nicht zu scheuen — von kausaler Bedeutung. Das Urnenschema um deswillen wiederum physikalisch zu behandeln, ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, eine allgemeinere Physik des Experiments zu geben, etwa zu fragen: Warum vertraut der Physiker, dafs die Isolation der Ursachen diese auch ausschliefslich zur Geltung bringt? Was bewog TORRICELLI, nach seinem berühmten Versuche vom Luftdruck als einer mefsbaren und von ihm gemessenen Gröfse zu sprechen? Die Aufgabe ist erkenntnistheoretisch, nicht physikalisch, und so hat man auch nicht den Zufall zu beurteilen, sondern zu prüfen, worauf jenes Vertrauen beruht, das den Quotienten für unsere Entscheidungen zukommt.

Wenn nun die Analogie der zahlenmäfsigen Regelmäfsigkeiten den Anlafs giebt, von Wahrscheinlichkeiten der Statistik zu reden, so verleitet ein zweites Moment, dafs wir nämlich in beiden Fällen uns über die disjungierten Fälle in völliger Unkenntnis befinden, den Vergleich vollständig zu machen und eine Verbindung herzustellen, die nur auf unserer Unkenntnis beruht. Jene Abweichungen, welche die mathematische Theorie berechnen will, sind nur von langen Beobachtungsreihen als sicher konstatierte und für die Beurteilung der Zukunft als wahrscheinliche zu erhalten; weil wir sie nicht kennen, dürfen wir ihnen auch nicht den Spielraum der Denkmöglichkeiten, die sich nur im Zufallsspiel mit den objektiven Daten decken, ohne weiteres überlassen. Ein „Zufallsspiel“, bei dem uns unbekannte Kräfte mitwirken, ist keine Lösung eines Problems, sondern eine Aufgabe. Wenn es so etwas in der Natur giebt, so haben wir die positiven Merkmale des Vergleichs zu suchen, nicht die negativen, aus denen sich nichts folgern läfst. Jene Theorie des Risikos fingiert eine Übereinstimmung, gegen welche sich der Verstand auflehnt; gleichwohl ist sie in Rechnungen, die für die Praxis bestimmt sind, von keiner solchen Gefahr, wie sie in wissenschaftlichen Fragen die voreilige Verwechslung von Denkinhalt und Wirklichkeit als elementare Täuschung mit sich bringen kann. Hat der Mathematiker das Risiko nach seinen Formeln berechnet, so wird

er es als vorsichtiger Praktiker als eine untere Grenze ansehen und vielleicht verdoppelt oder dreifach in Anschlag bringen.

Also haben wir doch auch hier einen Mafsstab, wird man sagen. Über Schätzungen, für welche jeder Anhalt fehlt, ist gar nicht zu streiten; nur soll man sie nicht als objektiv begründete ausgeben. In der Statistik ist schon der Begriff der Wahrscheinlichkeit eine Schwierigkeit, die man nur als alte Gewohnheit beibehält. Warum sagt man nicht „Durchschnitt" und überläfst es der Anwendung, mit Wahrscheinlichkeiten zu operieren, die für die Schätzung von historisch-terminologischer Bedeutung und auch durch den Rechnungsmechanismus gerechtfertigt ist? Die mathematischen Entwicklungen verlangen auch an sich nicht, dafs man bei der Anwendung alle ihre Konsequenzen ziehe, wenn die Voraussetzungen nur die Verwendung zu gewissen Operationen zulassen. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung hat man kein Universalmittel, das immer hilft. Der Saugpumpe ist es gleichgültig, welche Flüssigkeit man mit ihr heben will, aber sie mufs sich bescheiden und wird erst dann angewandt, wenn man der Flüssigkeit sicher ist. Das thut ihrer Nützlichkeit keinen Abbruch. Diskreditieren könnte sie nur das Vertrauen, dafs man sie nur in die Erde einzulassen brauche, um Wasser zu fördern, wie es die Versuche der menschlichen Vernunft in Misskredit gebracht hat, als sie sich selbst zutraute, die letzten Ursachen zu ergründen.

Der Rechenschematismus will überall von neuem definiert sein; er lehnt sich im Versicherungswesen an unsere Disziplin an, hat aber den Bernoullischen Satz so wenig als die Bayessche Regel nötig. Was im Bernoullischen Satze für das Spiel gefolgert wird, dem entspricht wesentlich in der Assekuranz das Gegebene. Ihre Grundlage sind Erfahrungen, nach welchen man die Zukunft und ihren Verlauf als wahrscheinlich beurteilt, gar nicht anders, als es der Finanzminister thut, wenn er das Budget des kommenden Jahres nach dem Vorjahre aufstellt. Nur dafs im Versicherungswesen nicht eine kurze Spanne Zeit, sondern ein grofser, bis zum Absterben aller Mitglieder währender Zeitraum in die Rechnung einbezogen wird.

Das Urnengleichnis versagt bei statistischen Verhältnissen fast jedesmal. Es bleiben nur gewisse Rechenoperationen, die eine scheinbare Übereinstimmung vortäuschen.

Für die Sterblichkeitsbeobachtungen können die verschiedensten Gesichtspunkte mafsgebend sein.

Jeder Mensch ist, um gleich möglichst zu spezialisieren, Bewohner eines Landes; er hat ein bestimmtes Alter, gehört einem Berufe an, wenn er nicht in den Kinderschuhen steckt, und tausend andere Merkmale lassen sich angeben, die auf einen andern Durchschnitt der Sterbeverhältnisse hinweisen. Er kann in der nächsten Minute, Stunde, morgen, in einem Monat, einem Jahre sterben, und immer ist der Durchschnitt ein anderer. Welche Fülle von Sterbewahrscheinlichkeiten, mit welchen die konstanten Bedingungen und die Zufälligkeiten sich abgeben müssen! Natürlich macht das schier Unfaſsbare jedem Unterscheidungsmerkmale, das wir aufstellen, besondere Urnen zuzusprechen, der Rechnung selbst keine Schwierigkeiten, und unsere behende Spekulation ist um die Begründung niemals verlegen. Wenn schon im groſsen und ganzen jene Argumentation richtig ist, die, von den konstanten und zufälligen Ursachen ausgehend, sich vorstellt, daſs man in dem Zufallsspiel ein fruchtbares Gleichnis gewinnen könne, so muſs ja auch in relativ kleineren Bezirken für das Allgemeinverhalten der Grund gelegt werden. Nur vergiſst man, daſs vieles der Praxis ohne weiteres gestattet sein wird, was der Wissenschaft, die es auf Mehrung der Erkenntnis abgesehen hat, verboten ist. Was statistisch nur als ein Durchschnitt anzusehen ist, kann sehr wohl der Versicherung als eine Wahrscheinlichkeitsgröſse dienen. Man kann es auch der Praxis nicht zum Vorwurf machen, daſs sie nicht sehr vorsichtig dem Wahrscheinlichkeitsbegriffe nach seinen positiven Bestimmungen zu entsprechen versuchte. Jener Gleichartigkeit der Fälle, die immer garantiert sein muſs, wenn von meſsbarer Wahrscheinlichkeit geredet wird, sucht sie mühsam gerecht zu werden, und wo sie sich auf lediglich kombinatorische Betrachtungen angewiesen sieht, da weiſs sie es sehr wohl, daſs sie es nur mit einem Notbehelf zu thun hat. Auch die Unabhängigkeit der Fälle sucht sie sich nach Möglichkeit zu sichern. Es würde keiner Anstalt einfallen, die Gebäude einer Stadt in Bausch und Bogen gegen Feuersgefahr zu versichern; eine jede beweist durch ihre Praxis, daſs sie von dem logischen Zwange des Wahrscheinlichkeitsbegriffs, der sich auf die Disjunktion allein beschränkt, doch sehr weit entfernt ist.

Zu dem Rechenschema hat allerdings die Lotterie gesessen. Wenn man 10 000 Lose verkauft und sich anheischig macht, in jedem Jahre eine bestimmte Zahl zu ziehen und dem Käufer eine Summe zu zahlen, bis alle Lose gezogen sind, so läſst sich leicht der Preis eines Loses berechnen. Die Beispiele lieſsen sich aber häufen,

für welche die Rechnung genau dieselbe sein würde, ohne dafs man daraufhin eine Erkenntnis durch die sich bietenden Gleichnisse zu vermitteln suchen würde.

Was als unsicherer Faktor in der Rechnung von Interesse ist, bezieht sich lediglich auf die Art, wie die versicherten Personen im Laufe der Jahre durch den Tod gelichtet werden. Wenn 10 000 Personen desselben Alters und von gleich guter Gesundheit zusammentreten, und bei dem Todesfall einer jeden eine bestimmte Summe gezahlt werden soll, so wird eine aus früheren Erfahrungen abgeleitete Sterbeordnung zugrunde gelegt und danach ein Durchschnittswert bemessen, mit dessen Erlegung alle nach dieser Grundlage erwachsenden Verpflichtungen beim Tode zu decken sein werden. Es giebt keine mathematische Wahrscheinlichkeit dafür, dafs sich das Absterben annähernd in den Verhältnissen jener Ordnung vollzieht, und es giebt keine Abweichung von dieser Ordnung, die sich als von bestimmter Wahrscheinlichkeit mit einem Quotienten werten liefse.

Die Versicherungsgesellschaften haben mit dem Urnenschema und den Zufallsspielen gerade soviel gemein wie die Friedensgesellschaften mit dem Kriege oder die Nüchternheitsbestrebungen mit dem Alkohol. Sie kämpfen gegen den Zufall, soweit mit demselben wirtschaftliche Nachteile verbunden sind, und der triviale, populäre Inhalt des Bernoullischen Satzes, nach dem man auf einen Durchschnitt in den Zahlen um so eher rechnen kann, je mehr Fälle man in seine Mafsnahmen einbezieht, sichert ihnen die vom Zufall unabhängige, ruhige, ungefährdete Geschäftsführung. Ihr Grundgedanke ist derselbe, welcher dem Zusammenschlufs der Menschen zu geordneten Gemeinwesen inne wohnt. Nur handelt es sich um eine freie Gemeinschaft und um besondere Vorkehrungen, deren schrankenlose Verallgemeinerung nichts anderes als den Zwang des Staatssozialismus bedeuten würde. Sind ihre Bestrebungen so alt wie die Kultur überhaupt, so hat ihr rationeller heutiger Betrieb eine entwickelte mathematische und statistische Technik zur Voraussetzung, die beide nur historisch, um nicht „zufällig" zu sagen, mit den Zufallsspielen verquickt erscheinen. Wer heutzutage sein Wohnhaus nicht gegen Feuersgefahr versichert, der wettet mit der Zukunft, die ihm verborgen ist. Er spart kleine Beträge, aber wagt einen grofsen Einsatz. Die Versicherungsgesellschaften haben darauf zu sehen, dafs sie bei dem einen so viel wagen, wie bei jedem andern. Die Solidarität aller oder vieler überwindet den Begriff des Spiels und der Wette.

Die Beurteilung des Einzelfalls ergiebt sich nach dem Gesagten ohne weiteres. Die Wahrscheinlichkeitsquotienten sind, wie das FRIES durchaus richtig erkannt und ausgesprochen hat, nur bedeutsam, sofern sie auf Durchschnittsverhältnisse hinweisen, die man berücksichtigt wissen will. Wenn man ganz sicher wüfste, dafs die Sterbeordnung — hier ein Amortisationsplan in doppeltem Sinne — zutrifft, wie man ein Recht hat, daran zu zweifeln, selbst dann würden die Quotienten für den einzelnen Fall von keinerlei Bedeutung sein. Nimmt man nicht zugleich an, dafs die Todeslose wie aus einer Urne gezogen werden, so ist auch der Gedankeninhalt, mit dem wir den Quotienten ausstatten, ein völlig anderer, als er mit den schematischen Beispielen verbunden ist.

NIKOLAUS BERNOULLI, der Neffe JAKOBS, hatte als Jurist das Bedürfnis, auf Grund der Disziplin eine Vorschrift zu geben, nach welcher der Tod eines Verschollenen beurteilt werden müsse[1]. Er meinte, wenn sein Totsein doppelt so wahrscheinlich ist, als sein Leben, so überwiegt die Wahrscheinlichkeit des Todes die Hälfte der Gewifsheit mit der Differenz $\frac{1}{6}$. Ich will dahingestellt sein lassen, ob dann, wenn $\frac{2}{3}$ der Altersgenossen des Verschollenen rechnungsmäfsig gestorben sind, die Todeserklärung als eine rationelle anzusehen ist. Der Praktiker wird sicherlich der Meinung zustimmen, dafs jede noch so willkürliche feste, gesetzliche Bestimmung den Vorzug vor einer solchen Rechnung verdient. Aber man kann sich sehr wohl denken, dafs in zweifelhaften Fällen eine ähnliche Schätzung auf Grund statistischer Zahlen am Platze ist. Mehr will auch STUMPF schwerlich in seinen letzten Ausführungen behaupten, mit deren gröfserem Teil sich auch eine fundamental abweichende Anschauung einverstanden erklären kann. Aber auch FRIES, gegen dessen „hyperkritische Doktrin" er kämpft, will nur eine „billige Bestimmung" von einer „mathematischen Wahrscheinlichkeit" unterschieden wissen. Mit Recht hat FRIES sich dagegen gewendet, dafs man mit Einteilungen, die sich nur auf den Mangel der Kenntnis gründen, anderes als Wetten unter gleich Unwissenden begründen könnte. Und seine Anschauungen vertreten wir in wesentlichen Punkten, wenn wir uns dagegen auflehnen, dafs man die BAYESsche Regel ohne die analogen Voraussetzungen des ersten Urnenbeispiels anwende, und dafs man mit dem BERNOULLIschen und BAYESschen Satze die statistischen Zahlen überhaupt beurteilen dürfe.

---

[1]) Vergl. CANTOR, Gesch. d. Mathematik. 3. Bd. 2. Abt. S. 323.

Die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ für die Würfelseite hat für uns eine objektive Bedeutung, und sie enthält implicite alle Folgerungen BERNOULLIS; die Sterbewahrscheinlichkeit 0.01 für irgend ein Alter hat mit dem BERNOULLIschen Satze nichts, mit dem Einzelfalle noch weniger zu thun, und sie besagt weiter nichts, als dafs unter 100 Personen desselben Alters, wie beobachtet, eine verstorben ist, und dafs man nach menschlichem Ermessen für die Zwecke irgend welcher Mafsnahmen mit diesem Quotienten rechnen dürfe, ohne Gefahr zu laufen, die Zukunft wesentlich falsch zu beurteilen.

Der Quotient 0.01 hat eine wesentlich andere Bedeutung als jene Gröfse $\frac{1}{6}$, weil ich vom Würfel weifs, dafs er ein Würfel bleibt, während ich über das Absterben in der Zukunft ganz und gar nichts weifs.

Beide Quotienten stimmen in negativer Hinsicht darin überein, dafs sie für den Einzelfall nicht die mindeste Bedeutung haben, wofern man nicht wetten oder raten oder den Inhalt der Voraussetzungen in anderer Form zum Ausdruck bringen oder aber mit anderen Ereignissen vergleichen will.

Ist diese letzte Verwendung unseres Erachtens eine hinreichende Legimation der Quotienten, so wollen wir auch gern an das „Mafs einer vernünftigen Erwartung“ glauben, wenn man nur klar und deutlich aussprechen will, was damit gemeint sein soll. Ich kann mir nicht anders helfen, als für den Würfel auf BERNOULLI und für die Sterbewahrscheinlichkeit auf die Thatsache zu rekurrieren, dafs von 100 Menschen bestimmten Alters und von scheinbar gleicher Konstitution in einem Jahre eben ein einziger gestorben ist.

---

# Schlufsbetrachtungen.

„Mathematische Definitionen können niemals irren," heifst es in der Kritik der reinen Vernunft (S. 572). Nur in „Ansehung der Präzision" kann gefehlt werden. „So hat die gemeine Erklärung der Kreislinie, dafs sie eine krumme Linie sei, deren alle Punkte von einem einigen (dem Mittelpunkte) gleich weit abstehen, den Fehler, dafs die Bestimmung krumm unnötigerweise eingeflossen ist." Die Definition der mathematischen Wahrscheinlichkeit ist keine mathematische, denn sie enthält nur eine Vorschrift, nach der gerechnet werden soll. Will sie rein mathematisch aufgefafst sein, so bedarf es keiner Andeutung über ein Wissen oder Nichtwissen, und die logische Subsumption allein entscheidet über die Quotienten, die immer sich bilden lassen, wo man zählen und kombinieren kann. Was gerechnet werden darf, um zu einem Wahrscheinlichkeitsquotienten zu führen, hat uns aber die Definition zu lehren, und sie hat einen Überflufs wie jene Kreisdefinition, wenn in ihr das Nichtwissen besonders betont wird.

Diese seit je übliche, von den Spielen und Wetten herrührende Geltendmachung eines Faktors, der wohl unseren Standpunkt charakterisieren, auch wohl, objektiv betrachtet, eine Handlung oder ein Unterlassen mit den zugrundeliegenden Urteilen uns verständlich machen kann, ist die Ursache der Mifsdeutungen, welchen sich die Disziplin beständig ausgesetzt sieht. Der Begriff des Wahrscheinlichen verlangt eine erkenntnistheoretische Behandlung und kann nur durch eine „Exposition" erklärt werden, nicht minder die Spezialisierung, mit welcher wir es zu thun haben. Diese Exposition hatte sich an die üblichen Schemata zu halten, zu beschreiben, was ihnen eigen ist, und die Gedanken blofszulegen, die wir mit ihnen verbinden — wie wir die immer empirischen

Daten in objektiver Weise auffassen, so dafs wir zu bestimmten Urteilen uns anschicken. Die Schemata enthalten Zufälliges — Kugeln, Karten, Würfel können nicht als notwendige Bestimmungsstücke angesehen werden. Aber das Allgemeine, das sie alle enthalten, darf in keinem einzigen Punkte preisgegeben werden; denn in der That, was an den Schematen wichtig ist, darf man nicht über Bord werfen, wenn man nicht zu völlig leeren Begriffsspielereien gelangen will. Wesentlich ist aber die physikalisch-mechanische Form aller dieser Beispiele, die auch nur scheinbar verloren geht, wenn man etwa einen Menschen eine der ersten zehn Zahlen raten läfst oder Ähnliches.

Es wäre absurd, bei dieser Elimination verstandesmäfsiger Gebärdung auf die hier unwesentlichen Momente Gewicht zu legen und nach psychologischen Gesetzen zu forschen, wo uns ohne weiteres völlige Gleichgiltigkeit der Seele gewährleistet ist. Es ist immer ein Geschehen in Frage, wenn eine mathematische Wahrscheinlichkeit ausgesagt werden soll. Aber dieses Geschehen ist so geartet, dafs es die begriffliche Subsumption der individuellen Fälle zuläfst. Ihm mufs eine völlige Gleichartigkeit der einzelnen Vorgänge zukommen — nicht eine absolute Gleichheit, die auch angenähert undenkbar oder besser unvorstellbar ist. Diese Gleichartigkeit, dieselbe, welche die Begriffsbildung überall voraussetzt, bezieht sich nur auf die wesentlichen Merkmale; die Verschiedenheit, eben die Individualität des Einzelvorgangs kommt gar nicht in Frage. Darauf wirken alle die sehr objektiven Bestimmungen hin, welche dem lotteriemäfsigen Verfahren in den Spielen einen Platz verschaffen. Wäre das ein subjektives Kriterium, was man mit dem Worte „Zufall“ von den staatlichen Lotterien verlangt, die Wahrung der Gleichberechtigung jedes Loses im Geschehen, in den Ziehungen, so weifs ich nicht, welchen Sinn es haben sollte, einen Staatskommissar bei diesen Veranstaltungen die Aufsicht führen zu lassen. Wenn wir also in der Disziplin vom Zufall sprechen, so ist es nicht derselbe Begriff, der einer menschlichen Auffassungsweise die Erklärung ersetzt, wenn sie sonst nicht zu haben ist. Vielmehr heifst hier dem Zufall anheimstellen, nach Möglichkeit Vorsorge treffen, dafs in einem unserer Anordnung unterliegendem Geschehen die Zahlenverhältnisse ausschliefslich zur Geltung gelangen. Das ist in absoluter Weise nicht möglich, und so schreiben wir auch auf der anderen Seite die unvermeidlichen Abweichungen auf die Rechnung eines Verhaltens, dem wir im allgemeinen anthropomor-

phistisch jede Richtung, jede Ordnung, jede Absicht, kurz alle die notwendigen Merkmale absprechen, die uns sonst bei der wissenschaftlichen und alltäglichen Beurteilung von mechanischen und geschichtlichen Ereignissen als Pfadfinder Dienste leisten.

Wir geben die allgemeinen Erkenntnisprinzipien nicht auf, wenn wir mit unseren Quotienten ein Urteil fällen, dessen Prädikat eine zwar konventionelle, aber völlig objektive Charakteristik ausspricht. Von Prinzipien, die nicht im allgemeinen Denken ihren Ursprung haben, findet sich nirgends etwas in der Disziplin. Die Unvollkommenheit unseres Wissens, der ruhelose Drang, es zu ergänzen, sind nicht Erkenntnisgrundsätze, sondern Thatsachen des menschlichen Bewufstseins, das auch für die Lücken in unserer Kenntnis nach adäquater verstandesmäfsiger Behandlung, nach Methoden sich umsieht. Es ist nun gar kein Wunder, dafs sich der Zwang der Denknotwendigkeit nicht einfinden will, wo es sich um eine Mafsbestimmung handelt, die sich zwar auf Gröfsen bezieht, die in bestimmter Weise sich nicht blofs definieren, sondern auch in Wirklichkeit irgendwie repräsentieren lassen, während sich schlechterdings nichts anderes aufweisen läfst, was gemessen wird, als eine Beziehung unseres Denkens zu einem in gewisser Weise unbestimmten Geschehen. Wir müssen eben deshalb auch dem Denken einen Spielraum lassen, der jenem Verhalten Rechnung trägt, und wenn uns objektive Grundlagen das Messen nahelegen, so kann nur eine Übereinkunft unser erstes Urteil fixieren. Wenn unter 100 Kugeln sich 20 *s* befinden, so befinden sich unter 1000 derselben Mischung 200 *s*; kann daraus allein mit Notwendigkeit gefolgert werden, das Erscheinen einer *s* Kugel sei in beiden Fällen gleichwahrscheinlich? Ist der Bindfadenbeweis von Laplace dafür ein zwingendes Argument? Jede andere Übereinkunft würde zu Ungereimtheiten führen, aber ein Vertrag, den man nicht zu schliefsen gezwungen ist, wird nicht dadurch denknotwendig, dafs er der zweckmäfsigste und plausibelste ist. Denknotwendig ist immer nur, dafs bei demselben Gegenstande der Aussage objektiv minder Bestimmtes wahrscheinlicher ist, als das Bestimmtere, und dafs gleichwahrscheinlich dasjenige ist, was denselben objektiven Bedingungen, und zwar in aller Schärfe, unterliegt. Auch diese Erfordernisse des Denkens fallen zusammen, wenn die Lücken in unserer Kenntnis eben die objektiven Bestimmungen vereiteln, die wir für die Abgrenzung unseres Begriffs als notwendig erachtet haben.

Diese Lücken, so behaupte ich, sind in unserer Disziplin nirgends solche, die sich auf das Verständnis der zu beurteilenden Erscheinungen beziehen. Von dieser Seite ist mit der ganzen Rechnung ein Erfolg nicht zu erwarten. Weil bei unseren Beispielen samt und sonders dies Verständnis der Vorgänge mitgebracht wird, können sie selbst im Gleichnis uns nichts näher führen. Im Gegenteil würde ein in der Natur beobachtetes Verhalten, das ohne irgend ein anderes Merkmal, als dafs sich 6 disjunkte, ihrem Wesen nach unbekannte, allein durch ein bedeutungsloses Merkmal zu unterscheidende Fälle im Verhältnis dieser Zahl immer wiederholen, sich der Beurteilung erbietet, uns ein unlösbares Rätsel aufgeben, ganz davon abgesehen, dafs die Bedeutungslosigkeit des Unterscheidungsgrundes eine Erschleichung wäre, zu der uns das Gleichnis voreilig verleitet hätte. Insofern hat die Meinung recht, nach der unsere Rechnung, die sich auf solch ein Beispiel zur Abschätzung zukünftiger Vorgänge werfen würde, mit der Kausalität nichts zu thun hat. Hier würden wir den Zusammenhang nicht mit dem Würfel oder sonst einer Parallele erhalten, aber wie in allen Fällen würde die notwendige Setzung des unbekannten Kausalzusammenhangs die Aufgabe fixieren und die Deutung der Rechnung im Sinne der Wahrscheinlichkeit ihrer Resultate einzig und allein rechtfertigen. Nur den Bernoullischen Satz wird man hier nicht anwenden dürfen. Er setzt das Spielschema voraus, auf das wir ohne hinreichende Ursache in der Wissenschaft nicht zurückschliefsen dürfen. Wer kann lehren, dafs überall in der Natur, wo die Zahlen einen ähnlichen Anhalt geben, auch nur als vorläufige Ausflucht der Zufall zu setzen ist, der, mit gewissen konstanten Bedingungen gezwungen, in den wahrscheinlichen Abweichungen, welche die Denkmöglichkeiten ihm lassen, eine eigenartige Freiheit, einen Spielraum hat?

Immerhin ist der Grundgedanke des Bernoullischen Satzes nach der Meinung seines Urhebers der des gemeinen Verstandes, der gewifs nicht fehlgeht, indem er die Ursachen, welche vorausgesetzt werden müssen, sicherer zu beurteilen glaubt, wenn er einen gröfseren Bezirk ihrer Wirkungsweise übersieht, als einen kleinen Ausschnitt, der, individuell irgendwie beeinflufst, von dem Gesamtbilde abweichen kann.

Aber ist dieser Gedanke nicht so sehr bekannt, als das Leitmotiv unserer begehrlichen Vernunft, die Ursachen nach ihr ganzen Entfaltung zu ergründen? In der Gesamtheit der Erscheinungen, die uns begrifflich zu einigen so leicht und auszudenken so schwer wird, die

Welt mit ihren Ursachen zu beurteilen, auf sie zu schliefsen — ist das nicht die höchste Verallgemeinerung des BERNOULLIschen Satzes? Es ist derselbe Trieb, der uns leitet, hier wie dort, und dieselben Irrtümer begleiten unsere hurtigen Gedanken, die, an das Kleine, Einzelne zu Sammelarbeit gewiesen, dieser Mühe überdrüssig, hier von der Höhe der grofsen Zahlen, dort von dem Aussichtspunkte der letzten Ideen unserer Vernunft die Welt zu erfassen suchen? Der Zufall als letzte Ausflucht oder als vorläufige Annahme, ob man Hypothese sagt oder Gleichnis, ist ein Prinzip der ignava ratio. Ist der BERNOULLIsche Satz, wenngleich einem Zirkel in der Anwendung auf die Statistik entsprechend, allenfalls noch ein erträglicher Gedanke, sofern er die Möglichkeit eines anderen Geschehens auf Grund derselben Voraussetzung konstanter Ursachen erwägt, so ist die Heranziehung der BAYESschen Regel, welche mit anderen denkmöglichen Ursachen rechnet, ein Verfahren, dessen Konsequenzen die Zufallshypothese allem Geschehen überwerfen würde. Beide Sätze können nicht verwandt werden, wo man so wenig imstande ist, konstante Bedingungen scharf zu definieren, wie jenen Zufall, der sie an exakter Wirkungsweise verhindert.

Es ist nun bei all den kühnen Anwendungen, die ein konsequenter Denker wie LANGE bis zu den Beurteilungen der gerichtlichen Verdikte und der Zeugenaussagen anerkennt, immer derselbe Grundfehler im Gebrauche unseres Verstandes, den wir der logischen Theorie haben zum Vorwurf machen müssen. Aus Möglichkeiten, die nur in unserem Denken vorhanden sind, kann für eine Beurteilung der Wirklichkeit nichts folgen, sowenig für die Gewifsheit als für die Wahrscheinlichkeit. Wo eine Argumentation in der Anwendung der Disziplin sich ihre Probleme mit Fiktionen zurechtlegt, da sind auch die Folgerungen, auch wenn sie sich in dem bescheidenen Gewande der Wahrscheinlichkeitsbehauptung präsentieren, wiederum nur Fiktionen; begründete Direktiven für die Beurteilung sind sie nicht; was soll aber die Fiktion einer Wahrscheinlichkeit?[1]) Und eine Fiktion ist es im besten Falle, wenn man aus einem disjunktiven Urteil mit 3 Gliedern ohne andere Kenntnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „folgert". Die Rückendeckung durch das Prädikat „sub-

[1]) Man verwechsele die Fiktion nicht mit der Wahrscheinlichkeit einer Wahrscheinlichkeit, die nur als zusammengesetzte, angebbare Gröfse einen Sinn hat.

jektiv“ ist völlig verfehlt. Darin ist STUMPF konsequent, dafs er die Objektivität der Aussagen völlig gewahrt wissen will. Über Worte ist nicht zu streiten; über so häufige Gegensätze wie subjektiv und objektiv soll man sich deshalb einigen. Subjektives hängt vom Individuum, nicht von seinem Standpunkt ab. Wer sich auf den Standpunkt von SIGWART stellt, dem ist der Quotient $\frac{1}{3}$ notwendig; er kann nicht anders urteilen; aber das Urteil ist ohne jede Bedeutung, es ist relativ leer, wenn es mehr sagen will, als die Disjunktion.

Wer auf einem Berge steht, übersieht einen gröfseren Raum, als der Horizont in der Ebene es erlaubt. Dadurch wird das Urteil über das Gesehene und der Unterschied nicht subjektiv.

Wer unter 3 Möglichkeiten eine zu erraten hat, der allein Wirklichkeit zukommen kann, dem blüht der Erfolg mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$. Wir prädizieren diesen Quotienten dem wahlfreien, für alle drei Fälle gleichbeschaffenen Geschehen in der Aussage des hasardierenden Verstandes; es ist nicht das Prädikat, welches wir dem zu beurteilenden Falle, wie er auch beschaffen sei, wenn es sich nicht um unsere Schemata handelt, zusprechen. Das ist ein anderer Standpunkt, der trotz der anscheinenden Pedanterie dieser Unterscheidung alle Zweifel löst, die z. B. STUMPF bei Beurteilung des BERNOULLIschen Satzes aufgestofsen sind. Es ist derselbe Unterschied, der von FRIES und COURNOT beständig urgiert und durch ihren Gegensatz von subjektiv und objektiv immer wieder verschleiert wird, weil man ihnen mit Recht in Gedanken wie STUMPF entgegenhalten wird, ein Wahrscheinlichkeitsquotient sei so subjektiv und objektiv als der andere.

Wenn Richter und Geschworene nur zu raten, nicht zu entscheiden hätten, so wäre nichts angemessener, als sie mit unserer Berechnung zu beurteilen. Freilich die Gottesgerichte des Mittelalters wären viel rationeller gewesen, wenn man die armseligen Delinquenten dem Lose überlassen hätte, anstatt sie mit Feuerproben und Ähnlichem dem sicheren Verderben preiszugeben. Das Duell, dessen Ausgang nach altem Volksglauben von Gott entschieden wird, hat nur Sinn bei gleicher Waffengeübtheit der Gegner. Es ist kein Wunder, wenn angesichts der Thatsache, dafs Gebrauch der Waffen aus dem alltäglichen Verkehr der Menschen eliminiert und jener Volksglaube geschwunden ist, der moderne Verstand der Amerikaner die Entscheidung dem Lose überläfst. Vom Standpunkte unserer Theorie ist das amerikanische Duell das allein richtige; höchstens bedarf es der Ergänzung durch das Gesetz,

welches den Überlebenden mit schwerer Strafe bedroht, weil es immerhin nur die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ hat, dafs der wirklich Schuldige von dem Zufall gerichtet wird. Es wäre Blasphemie, hier wie dort mit der Idee Gottes menschliche Irrtümer zu decken.

Den Standpunkt zu fixieren, den die Aufgaben der Lehrbücher eingenommen wissen wollen, ist nicht ganz leicht, weil hier allerdings genau zu sagen ist, was der Rechner wissen und was er nicht wissen soll. Verschiedene Resultate für denselben Fall sind es nur scheinbar, man mufs versuchen, nach dem Bernoullischen Satze zu prüfen, wie in einer grofsen Anzahl von Fällen die Quotienten zu dem Inhalt gelangen können, den sie aussagen. Wohlverstanden hat das keine statistische Wahrscheinlichkeit nötig; sie setzt ja voraus, was in der Theorie erst gefolgert wird und zu folgern sein mufs, wenn die Quotienten einen Sinn erhalten sollen.

Ein Beispiel mag das Gesagte veranschaulichen. In einer gröfseren thüringischen Stadt wird von einem Kunstverein allmonatlich in einer Lotterie ein Los gezogen. Es sind daran 1200 Mitglieder beteiligt, und bisher wurde die Glücksnummer immer wieder zurückgelegt. Nun ist in der allerletzten Zeit zweimal hintereinander dieselbe Nummer für den Gewinn erschienen. Für den Gewinner war die Wahrscheinlichkeit vor dem ersten Gewinn $\frac{1}{1440000}$ dafür, dafs s e i n Los 2mal nacheinander getroffen werden würde. Nach dem ersten Gewinn ist sie natürlich viel gröfser, nämlich $\frac{1}{1200}$, und nicht anders gilt sie für den Verein selbst, der mit dem Quotienten $\frac{1}{1200}$ die Wahrscheinlichkeit werten mufs, zweimal nacheinander in zwei bestimmten Ziehungen ein und dieselbe Nummer auszulosen.

Man ersieht hieraus zugleich, wie sehr die Wahrscheinlichkeitsbestimmungen auf scharfe gegenständliche Voraussetzungen angewiesen sind, so dafs nach ihrer Feststellung allerdings mit dem disjunktiven Urteil die Rechnung eingeleitet werden kann. Ist das richtig hergestellt, so tritt die Mathematik in ihr Recht, deren logische Elemente in unserer ganzen Auseinandersetzung nicht in Frage gekommen sind, weil ihr nur die Ausführung, nicht die Grundlage der Urteile zukommen kann. Eine Definition, die sich nur an disjunktive Urteile hält, kann daher nur die Mathematik beurteilen, die doch in allen Kontroversen der Kritik unserer Disziplin gar nicht in Zweifel gezogen werden kann.

Alle unsere Beispiele sind nicht logische Schemata, sondern sie lösen Formen des Denkens aus. Aber dieselben Formen leisten uns Dienste in tausend und abertausend Fällen, in denen von Wahr-

scheinlichkeit ganz und gar nicht die Rede sein kann. Keine logische Einteilung beabsichtigt auch nur entfernt, etwas über das zahlenmäfsige Vorkommen ihrer einzelnen Glieder auszusagen, und wer sie mit der Prämisse völligen Nichtwissens in dieser Richtung ausstattet, der fixiert einen Standpunkt, bei dem unsere Kenntnis und auch unser Urteil zu Ende ist. Setzt uns dann Jemand, Entscheidung heischend, die Pistole auf die Brust, so wird es wohl das Rationellste sein, dem Verstande keine weiteren Zumutungen zu machen, sondern dem Zufall, der Lotterie, die Verantwortung anheimzustellen.

Den allgemeinen sittlichen Grundsatz, den LOTZE aus der Betrachtung der Unvollkommenheit unseres Wissens herleitet: „wo unser Handeln unerläfslich ist, mögen wir uns auf die Wahrscheinlichkeit getrost verlassen, über die hinaus zur Gewifsheit zu gelangen uns unmöglich ist; wo wir dagegen gar nicht verpflichtet sind zu handeln oder doch nicht verpflichtet, ein unwiderrufliches Äufserstes zu vollziehen, da wird es sich schicken, unsere subjektive Überzeugung, die nur auf Wahrscheinlichkeit beruht, nicht für eine hinlängliche Berechtigung zu ihrer thatsächlichen Ausführung anzusehen“ (Logik S. 413), hat man hoffentlich nicht in eine Vorschrift für die Wissenschaft zu übersetzen, die sich an allgemeinen Erkenntnisprinzipien genügen lassen mufs und sich dagegen verwahren würde, die Lotterie unter ihre Methoden aufzunehmen.

Die Disjunktion, deren Absicht es ist, einen unlösbaren Zweifel auszusprechen, läfst sich nicht zu einem Wahrscheinlichkeitsurteil umwerten. Gleiche logische Form bedingt durchaus nicht eine gleiche Beurteilung, wenn die zur Prüfung stehenden Dinge das eine Mal in ihrer Totalität und Wirkungsweise bekannt, das andere Mal völlig verschlossen sind.

Der Spielraum unserer Gedanken ist unendlich; schränken wir ihn auf einen bestimmten, begrifflich erfafsbaren Bezirk ein, so leiten uns die Formen unserer Anschauung und geben uns Mittel, in räumlichen Bildern, wie es in der Logik geschieht, Normen unseres Denkens zu fixieren. Für die Abstraktion leisten diese Schemata eine nicht unwichtige Unterstützung; es ist ihnen aber eigen, dafs sie es niemals mit absoluten Gröfsenbestimmungen zu thun haben. Alle Grundbegriffe der Gröfsenlehre, wie Gleichheit und Ungleichheit, haben hier einen völlig anderen Sinn; die Umfangsverhältnisse der Begriffe sind nicht mathematische, sondern logische; die Beziehungen sind wesentlich qualitative; ihre quantitativen Ver-

hältnisse werden nur bei der Subordination, nicht bei der Koordination berücksichtigt; die Bilder der Logik schematisieren Rangverhältnisse, während die Mathematik diese aufheben und nur Ununterscheidbares, Gleichartiges behandeln will und darf.

Es ist daher kein Wunder, dafs die Disjunktion unserer Beispiele es immer mit abzählbaren, individuellen Fällen zu thun hat, welche der Subsumption keine Schwierigkeiten bereiten, weil sie wirklich einander gleichen wie ein Ei dem anderen. Wodurch ich sie unterscheide, das sind Merkmale, die auf die gezählten Fälle selbst, die Ziehungen und Würfe, keinen Einflufs haben. Alle unsere Erkenntnis richtet sich darauf, unsere Gedanken auf das einzuschränken, dem ein Wirkliches entspricht; nur versuchsweise gehen sie weiter und eilen dem mühsamen Erfahrungsgebrauch voraus. Aber sie können ihren Gebilden keine Realität verschaffen, wenn diese nicht in der Erfahrung eine Stütze haben. Die Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion der Urteilsmaterie, sagt STUMPF, aber ein Verhalten, oder was es sonst sei, das uns ein disjunktives Urteil mit lauter nur logisch unterscheidbaren Denkmöglichkeiten aufnötigt, so zutreffend das letztere sein mag, giebt uns kein Recht, von lauter wirklich einander gleichenden Fällen zu sprechen, die in dem Urnenschema und dem beliebigen mechanischen Apparat, der die Kugeln zu tage fördert, das Gegebene, die Urteilsmaterie ausmachen.

Die Koordination der Glieder im disjunktiven Urteil mufs also unter allen Umständen eine arithmetisch wertbare, sie darf keine rein logische sein, damit man eine mathematische Wahrscheinlichkeit aussprechen könne.

Fassen wir alle unsere Ausführungen in einem Beispiele zusammen, das wir schon oben verwandt haben, so ist die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für eine von zwei Kugeln, deren eine *w*, die andere *s* ist, wenn sie beide vorhanden sind und beide unter denselben Bedingungen gezogen werden können. Weifs ich nur, dafs irgendwo eine Kugel sich befindet, die nur *w* oder *s* sein kann, eines von beiden sicher ist, so giebt es keinen Quotienten, der mir die Wahrscheinlichkeit wertete, und ich beurteile nur mein glückliches oder unglückliches Erraten.

Im ersten Falle ist einem Geschehen, dem Zug einer Kugel, eine feste objektive Grenze gegeben; es giebt zwei logisch unterscheidbare, physikalisch gleichbedeutende Vorgänge, von denen einer wirklich werden mufs; im zweiten ist mein Denken auf den einen von zwei nur logisch unterscheidbaren Fällen eingeschränkt, die in ihrer

genetischen Differenz beliebig, einen Fall von unendlich vielen derselben Art gegenüber keinem von der anderen produzieren oder aus irgend einer Verteilung, die ich nicht kenne, mit völlig gleichem Recht herstammen können. Wäre dieser Ursprung gegeben, so wäre irgend ein zwischen 0 und 1 liegender Quotient die zutreffende Wertung der Wahrscheinlichkeit.

Diese mathematische Wahrscheinlichkeit hat es also mit einem relativ unbestimmten, zufälligen Ereignis zu thun, das nach seiner physikalisch-mechanischen Seite keinerlei Interesse bietet, und für dessen lediglich konventionelle Bestimmung in der Form unserer Quotienten die einzige funktionelle Beziehung, die dem Verstande zu setzen übrig bleibt, nur das Zahlenverhältnis, mafsgebend ist.

Jener belächelnswerte Unterschied zieht also eine Grenze zwischen einer scharfen objektiven Bestimmung und einer Erschleichung, die weder subjektiv noch objektiv, sondern lediglich ihrem Charakter gemäfs eine Aussage usurpiert, die ganz und gar nicht begründet ist.

Wenn wir gleichwohl die beiden Fälle als für die Beurteilung identische anzusehen uns versucht fühlen, so wirkt dabei derselbe dialektische Schein, der uns vorspiegelt, dafs unseren Ideen, von denen wir nicht abzulassen vermögen, Realität zukommen müsse. Unsere Gedanken ruhen nicht und kehren immer wieder zu den Forderungen unserer Vernunft zurück, die, alles einzelne überspringend, in der begrifflichen Zusammenfassung aller Erscheinungen eine Welt, nach den Begriffen, mit welchen wir urteilen, eine einzige Weltursache, und nach dem Bilde des Zufalls, welchen wir schaffen können, eine Freiheit in dem Geschehen, das sich an unseren Willen knüpft, setzt und nun mit diesen Ideen, die scheinbar von der höchsten Instanz der Erkenntnis gebilligt sind, operieren möchte, als wenn sie nicht ihre eigenen Schöpfungen, sondern ebensoviel Wirklichkeiten wären.

Sobald wir den Ideen mit dem Verstandesgebrauche näher rücken, ihnen gegenüber die Ansprüche geltend machen, welche wir an die Erkenntnis stellen, die man als sicher Gewufstes und allgemein Anerkanntes in dickleibigen Encyklopädieen niederlegt, weichen sie zurück und überlassen uns einer Leere, die uns dem Skeptizismus in die Arme führt, wenn es uns nicht gelingt, zu ihnen feste Stellung zu nehmen.

Giebt es nun aber im Felde der reinen Vernunft keine Polemik, weil beide Teile Luftfechter sind [„die Schatten, die sie zerhauen, wachsen, wie die Helden in Walhalla, in einem Augenblicke wiederum zusammen, um sich aufs neue in unblutigen Kämpfen belustigen zu können." (Krit. d. r. V. S. 589)], so sind wir besser daran, wo es uns im Gebiete des Verstandesgebrauchs nur auf Mehrung oder Sicherung der Erkenntnis in der Erfahrung ankommt.

Unsere Beurteilung im Gebiete des Wahrscheinlichen kann nur durch den Verstand selbst kritisiert und korrigiert werden. Es entspricht dem Möglichen so wenig als dem Wahrscheinlichen etwas aufserhalb unserer Gedanken. Das Mögliche ist es nur, weil der Komplex von Bedingungen, dem wir irgend einen Erfolg zusprechen, eben diesen Erfolg einmal herbeigeführt hatte, oder eine Kombination von Bedingungen, die allen bisherigen Erfahrungen gemäfs sind, eine Wirkung hervorzubringen vermag, die wir als möglich bezeichnet haben. Das Mögliche wird in irgend einem Grade zum Wahrscheinlichen, wenn aufser den allgemeinen auch noch besondere Gründe sich angeben lassen, die für das Subjekt der Aussage sprechen. Das mit mathematischer Wertung als wahrscheinlich Geltende setzt voraus, das die Gründe gleichwertig und die Wirkungssphäre in ihrer Totalität gegeben sei. Liegt diese nur in unseren Gedanken, beruht die Entscheidung des Falles, der zur Beurteilung steht, in der Wirklichkeit auf uns völlig unzugänglichen Zusammenhängen, so täuscht uns die gleiche Unwissenheit über die einzelnen Fälle nur eine gleiche, begründete Wahrscheinlichkeit vor und wir verfallen dem Irrtum, wenn wir unser Urteil durch ein Moment bestimmen lassen, dem nichts als voreiliges Denken entspricht.

Wenn

$$S \text{ entweder } P_1 \text{ oder } P_2$$

sein kann und eins von beiden sein mufs, und wenn

$$S' \text{ entweder } P'_1 \text{ oder } P'_2 \text{ oder } \cdots\cdots P'_n$$

sein kann, aber eins von diesen $n$ Prädikaten notwendig erhalten mufs, so ist es ein Trugschlufs, zu sagen, das Urteil

$$S = P_1$$

sei wahrscheinlicher als

$$S' = P'_n$$

wofern diese Formen den ganzen Inhalt unserer Kenntnis schematisieren. Ebenso ist es eine Täuschung, zu sagen, das Urteil

$$S' = P'_1 \text{ oder } P'_2 \text{ oder } P'_3 \cdots \text{ oder } P'_{n-1}$$

sei wahrscheinlicher als

$$S' = P'_n,$$

obwohl dort $n-1$ Möglichkeiten, hier nur eine von $n$ in Betracht kommen. Der Irrtum liegt aber nicht in den logischen Formen, sondern in der Unbestimmtheit ihres Inhalts, der auch für die Wahrscheinlichkeitsaussage zureichende Gründe aufweisen mufs.

Es kann sehr wohl möglich sein, dafs die Gröfsenverhältnisse, welche das Wahrscheinlichkeitsurteil für mathematische Graduierung geeignet machen, in der Langeschen Darstellungsweise so aussehen:

$P$ $\qquad$ $P$

| $\times S$ |
|---|

| $P_1$ | $P_2$ |
|---|---|

$P'$ $\qquad$ $P'$

| $\times S'$ |
|---|

| $P'_1$ | $P'_2$ | | | $P'_{n-1}$ | $P'_n$ |
|---|---|---|---|---|---|

und unser Denken und unsere Unkenntnis allein kann nicht bewirken, dafs sich die noch so einwandfreien logischen Koordinationen den Ansprüchen fügen, welche von der Mathematik gestellt werden, sofern sie zählen soll, was unser Urteil leiten kann.

Der Kombinatorik entspricht in der Logik das Verfahren, mit dem wir disjunktive Urteile zur Verknüpfung bringen. Will die Logik rein formal die Verbindungsweisen zur Darstellung bringen, die in der mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre zur Anwendung gelangen, so legt sie den Gedankeninhalt mathematischer Operationen blofs. Aber die formale Logik so wenig als die Mathematik kann lehren, was wahrscheinlich ist. Die Mathematik hat es lediglich mit Gröfsen zu thun; ihre Verknüpfungen werden von der Logik beschrieben und gerechtfertigt, und wenn der Mathematiker sich unter Umständen gegen die Philosophie ablehnend verhält, weil er sie, leider nicht ohne Grund, mit der Spekulation verwechselt, so ist er in der Lage des Magnaten, der alles, was er braucht, im eigenen Betriebe herstellt. Die Mathematik schafft sich ihre Methoden selbst und braucht auf eigenem Gebiete die Polizei der Kritik nicht zu scheuen. In der Wahrscheinlichkeitslehre und der unbeschränkten Anwendung der Kombinationslehre aber ist sie gleichwohl auf Abwege geraten. Der Mathematiker braucht Gleich-

artiges und ist gewohnt, in seinen Rechnungen von Unwichtigem zu abstrahieren; ihm ist die Neigung zu verzeihen, Gleichartiges zu sehen, wo es in Wirklichkeit weder ist noch sein kann. Im diskursiven Denken herrschen qualitative Unterschiede; die Subordination der Begriffe, welche dem Oberbegriff einen gröfseren Umfang zuspricht, als dem besonderen, der sich ihm einfügt, hat logisch nur Bedeutung, weil gröfser und kleiner hier als allgemein und minder allgemein sich gegenüberstehen. Kein Wunder, dafs überall Anschauung und Begriff, wo wir ihnen im Gebrauch unseres Verstandes wirklich begegnen, ihre gemeinschaftliche Wurzel nicht verleugnen, aus der sie nicht wie zwei Stämme, sondern einheitlich, nur im analytischen, abstrakten Denken trennbar, emporspriefsen.

Sind formale Logik und Mathematik für sich nicht kompetent, Wahrscheinliches zu bestimmen, so müssen beider Ansprüche auch hier gewahrt sein, wie in allem Denken. Aber es ist lediglich ein allgemeines Erkenntnisproblem, das zur Diskussion steht; auch die Mechanik an und für sich hat nicht mitzureden, weil sie schon vorausgesetzt. ist. Die Einzelprozesse spielen ihre Rolle, aber eben sie kümmern uns nur insofern, als sie selbst erklärt sind, soweit es eine Erklärung giebt und geben kann. Das Prinzip der gleichen Spielräume haben wir deshalb als unnötig abgelehnt. Es genügt uns, dafs wir den Begriff eines gleichartigen und gleichvorbereiteten Geschehens bilden können, dafs wir nicht blofs Dinge zur Einheit in der Vorstellung bringen können, sondern auch Vorgänge, welcher Art sie auch seien. Die Zahl bestimmt unser Urteil, weil und wofern das Geschehen von ihr abhängt. Soll mein Urteil eine Funktion der Urteilsmaterie, die wesentlich in einem Zahlenverhältnis besteht, sein, so mufs auch das zu Beurteilende eine Funktion der Zahl oder doch wenigstens wesentlich sein. Wie kann das Wahrscheinliche, das begründeterweise sich verwirklicht, noch den Anlafs zu einer Fragestellung geben?

Der Quotient selbst kann sich nur in einer Anzahl bewähren, die der Gesamtsphäre entspricht, aus welcher wir den charakteristischen Bruch entnommen haben. Weicht das Gesamtverhalten von unserer Bestimmung ab, so kann ein Irrtum vorliegen, oder die an sich richtige Beurteilung hat sich darauf zu berufen, dafs sie die völlige Sicherheit des Geschehens weder behaupten wollte noch hinreichend begründen konnte. Der Einzelfall widerlegt und bestätigt nichts. Der Gewinner, der sich zum Bewufstsein bringt,

dafs seine Chancen 1 : 1499999 betragen haben, urteilt richtig; sein Glück kann ihn nicht widerlegen. Dafs er nichts Subjektives ausgesagt hatte, liegt am Tage, wenn man nicht etwa damit behaupten will, dafs wir subjektiv urteilen, insofern wir nicht allwissend sind. Erst wenn er eine besondere Ursache für den seltenen Fall konstruieren zu müssen glaubt, gerät er auf Abwege, und gar nicht schlimmer als der Philosoph, der, nicht imstande, das Bebrüten des Eies durch den Vogel aus materiellen Ursachen abzuleiten, lediglich aus seiner Unkenntnis auf die Undenkbarkeit erschöpfbarer wissenschaftlicher Ursachen und mit einem kühnen mathematischen Ansatze auf ein geheimnisvolles geistiges Moment exakt zu schliefsen sich anschickt. Auch das ist ein Standpunkt, bei dem man nach Kants eindringlicher Warnung nur mit Verwunderung Zahl und Gleichung in die Aktion treten sieht. „Das grofse Glück, welches die Vernunft vermittelst der Mathematik macht, bringt ganz natürlicherweise die Vermutung zuwege, dafs es, wo nicht ihr selbst, doch ihrer Methode auch aufser dem Felde der Gröfsen gelingen werde, indem sie alle ihre Begriffe auf Anschauungen bringt, die sie a priori geben kann, und wodurch sie, so zu reden, Meister über die Natur wird.“ (Kritik d. r. V. S. 567.)

Warum diese Vermutung falsch ist, hat Kant am citierten Orte sehr eingehend erörtert. In der Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf metaphysische Fragen zeigt sich aber ein doppelter Irrtum. Einmal wird als mathematische Beweisführung ausgegeben, was höchstens die zahlenmäfsige Illustration unserer Unkenntnis sein kann, sofern es sich um eine abgeschlossene Reihe von Denkmöglichkeiten handelt, denen auch die Möglichkeit nach Gesetzen der Erfahrung abgeht; fürs andere sucht man etwas wahrscheinlich zu machen, das mit dem gelindesten Zweifel behaften soviel als es leugnen heifst. Wer die Möglichkeit zugiebt, dafs die erhabenen Ideen unserer Vernunft eitel Blendwerk sein können, und der Quotient läfst das immer zu, wenn auch die Neunen des Dezimalbruchs bis zum Monde reichen, der mufs die Waffen strecken, wenn der Gegner ihm seine Scheinbeweise zerpflückt. „Denn die Wirklichkeit solcher Ideen blofs wahrscheinlich machen zu wollen, ist ein ungereimter Vorsatz, ebenso, als wenn man einen Satz der Geometrie blofs wahrscheinlich zu beweisen gedächte.“ (Kritik d. r. V. S. 602.)

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Kritik ihrer Anwendungen aufzufordern, war der Zweck aller unserer Ausführungen.

Wir haben in ihren Aufstellungen und Konsequenzen ein festes Gefüge aufweisen können, das sich gegen den Vorwurf der Willkür im Sinne eines Instruments, mit dem man die Objekte bald grofs, bald klein sieht, durchaus verwahren kann. Schwierigkeiten, den scharfen Anforderungen der Auffassung gerecht zu werden, sind wir nirgends begegnet. Kunststücke, welche die menschliche Erkenntnis nicht leisten kann, sind keine Schwierigkeiten, sondern Verstandeshallucinationen, gegen die man sich zu wehren hat.

Der Schwerpunkt der Disziplin liegt in ihrem logischen Gehalt, der nur gerechte Würdigung finden würde, wenn die Vorlesungen über angewandtes Denken sich seiner bemächtigten. Namentlich die Kontroversen und ihre Kritik geben ein lehrreiches Kapitel der Erkenntnistheorie. Den Streit endgültig geschlichtet zu haben, mafsen wir uns nicht an; im Gegenteil hoffen wir, dafs in zukünftiger Darstellung von berufener Seite die Mängel vermieden werden, deren wir uns durchaus bewufst sind.

Die Disziplin ist nicht einem unmittelbaren Gebot des menschlichen Verstandes entsprungen. Sie ist ein Instrument, das auf Erfindung beruht, und kein universell anwendbares Medium unserer Gedanken, das bei der Analyse des Verstandes, welche Kant vorgenommen hat, sich notwendig hätte ergeben müssen. Denn zu entdecken sind nur die Gesetze unseres Denkens und unserer Anschauung. Gesetze giebt die Disziplin nicht, sondern Regeln, die man gut thut zu beachten, zu denen man aber nicht gezwungen werden kann.

Die Gesetze aber sind für Jedermann und auch für den gemeinen Verstand, denn er fügt sich ihnen. Er, der Verstand, irrt niemals, so wenig wie die Sinne sich täuschen, aber sein Inhalt ist mangelhaft und ewig der Ergänzung fähig. Überkommene Irrtümer ruhen auf der Überzeugung, dafs die allgemeine Prüfung schon vorgenommen ist: was in der Schule gelehrt wird, ist richtig, weil es der Lehrer sagt und wissen mufs. Vor der eigenen Prüfung weicht jeder Irrtum, wenn er nur vom Denken abhängt, aber das Erkennen verlangt mehr — eine Analyse des Geschehens, das dem Denken konform sein soll. Diese Analyse ist unsere menschliche Aufgabe; wir glauben uns oft schon am Ende, zwingen unsere Gedanken dem Geschehen auf, es reagiert scheinbar, also sind wir im Recht. Aristoteles mahnt: wundert euch, Cartesius: zweifelt, Kant: seid kritisch, und wenn alle Gesetze des Denkens und der

Anschauung entdeckt und inventarisiert wären, so wäre der Meifsel geschärft, aber der Marmor ist spröde.

Wir erkennen das Einzelne; es gelingt uns die Analyse hier und dort, aber das Gesamtbild will sich nicht herstellen. Da tritt der Künstler ein, der frei schafft, die Lücken auszufüllen. Wir haben dann ein Ganzes, aber dem ästhetischen Genügen fehlt das Vorhandensein einer lückenlosen, überzeugenden, zwingenden Realität. In der Philosophie hat es der Künstler am schwersten, denn die Metaphysik bedarf des Mörtels, den wir unserer schon vorhandenen Erfahrung entnehmen; die Phantasie wird nicht blofs durch freies, aber gesetzliches Denken, sondern auch durch alles sichere Wissen der Menschen gezügelt.



r'sche Hofbuchdruckerei Stephan Geibel & Co. in Altenburg.



